



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ  
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

-----

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ  
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ  
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ  
ΤΜΗΜΑ Α΄

-----

Ταχ. Δ/ση: Ανδρέα Παπανδρέου 37  
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι  
Ιστοσελίδα: [www.minedu.gov.gr](http://www.minedu.gov.gr)  
Πληροφορίες: Α. Πασχαλίδου  
Β. Πελώνη  
Τηλέφωνο: 210-3443422  
210-3442238

Βαθμός Ασφαλείας:  
Να διατηρηθεί μέχρι:  
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 26-09-2018  
Αρ. Πρωτ. 160253/Δ2

ΠΡΟΣ:

- Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης
- Σχολ. Συμβούλους Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)
- Δ/νσεις Δ/θμιας Εκπ/σης
- Γενικά Λύκεια (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής  
Πολιτικής  
[info@iep.edu.gr](mailto:info@iep.edu.gr)

**ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ τάξεις Ημερήσιου ΓΕ.Λ και Α΄, Β΄, Γ΄ τάξεις Εσπερινού ΓΕΛ για το σχολ. έτος 2018 – 2019**

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. ΥΠ.Π.Ε.Θ. 141607/03-09-2018 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 33/26-07-2018 του Δ.Σ, Ανακοίνωση στο ορθό 31-08-2018) σας αποστέλλουμε τις παρακάτω οδηγίες για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών** για το σχολικό έτος 2018-2019:

1. Άλγεβρα (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
2. Γεωμετρία (Τάξεις: Α΄, Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Α΄, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)
3. Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών (Τάξεις: Β΄ Ημερησίου ΓΕΛ, Β΄, Γ΄ Εσπερινού ΓΕΛ)

# **ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Τάξης Ημερησίου ΓΕΛ**

## **ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ**

### **I. Εισαγωγή**

Το μάθημα «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσω της ανάπτυξης και σύνδεσης πολλαπλών αναπαραστάσεών τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν από ψηφιακά περιβάλλοντα, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

### **II. Διδακτέα ύλη**

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

#### **Εισαγωγικό κεφάλαιο**

Ε.2 Σύνολα

#### **Κεφ.2<sup>ο</sup>: Οι Πραγματικοί Αριθμοί**

- 2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους
- 2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)
- 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού
- 2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (εκτός των ιδιοτήτων 3 και 4)

#### **Κεφ.3<sup>ο</sup>: Εξισώσεις**

- 3.1 Εξισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού
- 3.2 Η Εξίσωση  $x^p = a$
- 3.3 Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

#### **Κεφ.4<sup>ο</sup>: Ανισώσεις**

- 4.1 Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού
- 4.2 Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

#### **Κεφ.5<sup>ο</sup>: Πρόοδοι**

- 5.1 Ακολουθίες
- 5.2 Αριθμητική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα  $n$  διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου )
- 5.3 Γεωμετρική πρόοδος (εκτός της απόδειξης για το άθροισμα  $n$  διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου )

### **Κεφ.6<sup>ο</sup>: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων**

- 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης
- 6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
- 6.3 Η Συνάρτηση  $f(x)=ax+b$  (εκτός της κλίσης ευθείας ως λόγος μεταβολής)

### **Κεφ.7<sup>ο</sup>: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων**

- 7.1 Μελέτη της Συνάρτησης:  $f(x)=ax^2$
- 7.3 Μελέτη της Συνάρτησης:  $f(x)=ax^2+bx+c$

### **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8-6-2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

#### **Εισαγωγικό Κεφάλαιο**

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην **§Ε.1**, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

#### **§Ε.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους μαθητές της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

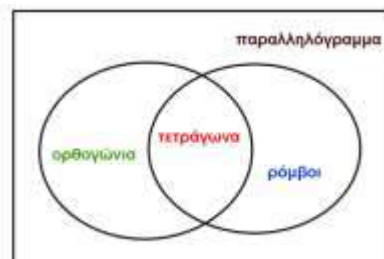
Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ.1, Δ.2 και Δ.3 του ΑΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείτε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων και ρόμβων.

[Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι ...



### **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του. Η επανάληψη και περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στον αλγεβρικό λογισμό (αλγεβρικές πράξεις, παραγοντοποίηση, ταυτότητες κ.λ.π.) δεν αποτελεί τον κύριο στόχο αυτού του κεφαλαίου. Ειδικότερα:

#### **§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί  $\frac{4}{3}$ , 1.333..., 1,010101..., 1,1010010001..., καθώς και

στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως  $\frac{4}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ , 1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ ,  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ .

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού:  $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ . Η δραστηριότητα Δ9 του ΑΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα  $3+11$  είναι άρτιος και το γινόμενο  $3 \times 11$  είναι περιττός. Κατόπιν αυτών:

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι: αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό

τους είναι περιττός

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι: αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) Το γινόμενο δύο φυσικών είναι 1271. Αν υποθέσουμε ότι έχει δίκιο ο Κώστας ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

i. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα άρτιος

ii. το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα περιττός

iii. δεν είναι σίγουρο αν το άθροισμα είναι περιττός ή άρτιος μέχρι να μάθουμε ποιοι είναι οι αριθμοί.

γ) είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

### §2.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.9 του ΑΠΣ) καθώς και στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες:  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$ , ενώ  $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$  και στα σχόλια 1 και 2 της σελ. 56 .

### §2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να επισημανθεί η μέθοδος απόδειξης των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής) και να συζητηθεί η αναγκαιότητα του «πρέπει» (Ü) και του «αρκεί» (Û) σε αυτές.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους μαθητές και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$  καθώς και  $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$  καθώς και η γεωμετρική ερμηνεία αυτών, επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση  $|x - 2| < 3$  σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ.  $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow (x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ ).

-1

2

5

3 μονάδες

3 μονάδες

Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων  $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$  και  $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$  ή  $x > r$ . Η δραστηριότητα Δ.10 του ΑΠΣ υποστηρίζει την παραπάνω προσέγγιση.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με  $-2 < x < 7$ .

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: i.  $|x+2|$  ii.  $|x-7|$
- β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:  $|x+2| + |x-7|$
- γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = |x+2| + |x-7|$  γεωμετρικά.
- δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

**§2.4 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες**

Οι μαθητές έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$  και  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ ) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα των αλγεβρικών μεθόδων έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης, προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ.11 του ΑΠΣ.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση  $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$  δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1<sup>η</sup> απάντηση:  $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2 \cdot \frac{1}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2<sup>η</sup> απάντηση:  $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4} \cdot 2} = (-2)^1 = -2$

**Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση  $x^y = a$ . Ειδικότερα:

**§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες**

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής  $ax + \beta = 0$ , της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη

μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής  $ax+b=0$ , για δυο κυρίως λόγους: α) είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και β) δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης γενικά.

Για το λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου (σχολικό βιβλίο, σελ. 80). Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του  $\lambda$  (π.χ.  $\lambda=2$ ,  $\lambda=5$ ,  $\lambda=1$ ,  $\lambda=-1$ ) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων και απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού (όπως η άσκηση 10 της Α' Ομάδας).

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε εξισώσεις, όπως η  $|x-5|=-3$ , την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές από την αρχή ως αδύνατη.

### **§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής  $x^v=a$  να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

### **§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες**

Η επίλυση της εξίσωσης  $ax^2+bx+c=0$ ,  $a \neq 0$  στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους μαθητές. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.13 και Δ.14 του ΑΠΣ).

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους μαθητές είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα  $S$  και γινόμενο  $P$ ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε ασκήσεις με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος  $y$  (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή  $t$  (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:  $y = 60t - 5t^2$ .

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

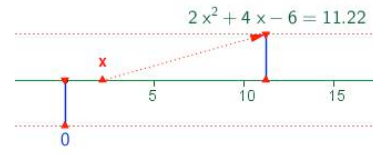
β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος  $y = 175$  m;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132>



#### Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> βαθμού Ειδικότερα:

##### §4.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους μαθητές και ανισώσεις όπως οι  $|x-5|<3$  ή  $|x-5|>3$ , των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

##### §4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν  $\Delta < 0$ , θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές.

Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού (π.χ. η δραστηριότητα Δ.15 του ΑΠΣ και η άσκηση 7 της Β' Ομάδας) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την ανίσωση:

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών  $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$  και  $M = (\sqrt{37})^2 - 5\sqrt{37} - 6$ .

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

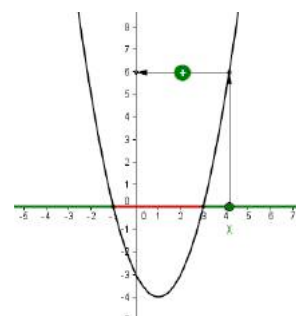
γ) Αν  $\alpha \in (-6, 6)$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής  $x$ , ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752>

### **Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

#### **§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό (π.χ. ότι ο φυσικός

αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας  $a$ , αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό  $a_1$  που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής), δεδομένου ότι αυτός δυσκολεύει τους μαθητές (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ ).

#### §5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

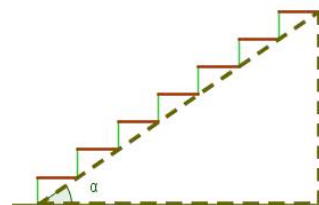
Αρχικά οι μαθητές χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. η δραστηριότητα Δ.17 του ΑΠΣ). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το  $n$ -οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν στα γενικά συμπεράσματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ χωρίς τα ερωτήματα  $\gamma$  και  $\delta$ ). Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως η άσκηση 12 της Α' Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δεν θα διδαχθεί.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο μαθητής να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155>



#### §5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ' αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.19 (χωρίς τα ερωτήματα  $\delta$  και  $\epsilon$ ) και Δ.21 (χωρίς το ερώτημα  $\delta$ ) του ΑΠΣ, που στόχο έχουν να αντιληφθούν οι μαθητές κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του  $n$ -οστού όρου γεωμετρικής προόδου. Η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δεν θα διδαχθεί

##### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

### Κεφάλαιο 6°

(Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς μαθητές

δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως)μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Οι έννοιες «κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης», «μονοτονία – ακρότατα - συμμετρίες συνάρτησης», δεν συμπεριλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη, όπως αναπτύσσονται στις παραγράφους 6.4 και 6.5. Οι έννοιες αυτές θα μελετηθούν στις ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων της μορφής:  $f(x)=ax+b$  (§6.3),  $f(x)=ax^2$  (§7.1) και  $f(x)=ax^2+bx+c$  (§7.3). Ειδικότερα:

### §6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ.22, Δ.23 και Δ.24 του ΑΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση), στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) και στην ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος). Ο τυπικός ορισμός της μονοτονίας θα συζητηθεί στην Β τάξη. Μπορεί όμως κατά την κρίση του διδάσκοντα να εισαχθούν διαισθητικά οι έννοιες της μονοτονίας και ακρότατων και να γίνει η αναγνώριση τους σε γραφικές παραστάσεις. Οι έννοιες αυτές δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη.

Τονίζεται ότι ο τύπος της απόστασης δύο σημείων αποτελεί μία άλλη έκφραση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με όρους συντεταγμένων, ανακαλεί τις έννοιες των παραγράφων 2.3 και 2.4 . και προσφέρεται για υπολογισμούς. Επισημαίνεται ότι:

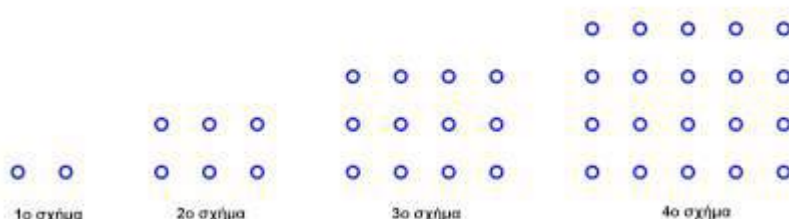
- A) Η απόδειξη του τύπου δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης και ως εφαρμογές του θα διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 .
- B) Δεν θα διδαχθεί η εφαρμογή της σελίδας 155

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.15 και Δ.26 του ΑΠΣ

#### Ενδεικτική δραστηριότητα

1:

i) Ποιόν κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε



για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα ;

### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν με  $\Delta$  παραστήσουμε μια δόση αμπικιλίνης (η αμπικιλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με  $W$  παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση  $\Delta = 50W$  δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

- Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
- Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;
- Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

### **§6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας  $\psi = \alpha x + \beta$  στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  στη γραφική παράσταση της  $f(x) = \alpha x + \beta$ , ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα  $y'y$  στο ίδιο σημείο).

Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, να καταλήξουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία της συνάρτησης και να τα εκφράσουν συμβολικά, καθώς και να διερευνήσουν το ρόλο της παραμέτρου  $\alpha$  σε σχέση με αυτά (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.27 του ΑΠΣ).

### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

βι) Αν  $x$  είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυπήσει πεταλούδα για να κάψει

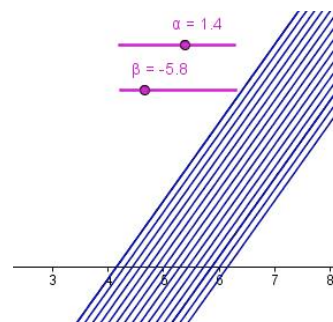
$$360 \text{ θερμίδες είναι: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

βii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βι), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην  $y = \alpha x + \beta$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη



συνάρτηση  $f(x) = ax + b$  μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας  $y = ax + b$  και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για  $a$  σταθερό και  $b$  μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774>

## Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές μελετούν τη συνάρτηση  $\psi = ax^2$  και τις ιδιότητές της. Επίσης, με αφετηρία την  $\psi = ax^2$ , κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  την οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούν για να μελετήσουν ιδιότητες της  $f$ . Ειδικότερα:

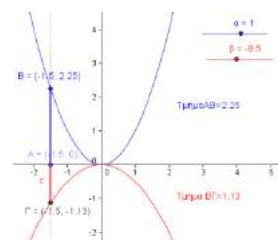
### §7.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi = ax^2$ . Μέσα από την παρατήρηση της γραφικής παράστασης και των τιμών διερευνούν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες των συναρτήσεων  $g(x) = x^2$  και  $h(x) = -x^2$ . Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης γενικεύουν τα παραπάνω συμπεράσματα για τη συνάρτηση  $f(x) = ax^2$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ. 29 του ΑΠΣ ή η χρήση λογισμικού) και τα εκφράζουν συμβολικά.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το μικροπείραμα « Οι μεταβολές της συνάρτησης  $\psi = ax^2$  » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για τη μελέτη μονοτονίας της συνάρτησης  $\psi = ax^2$  όταν  $a > 0$  ή  $a < 0$ .

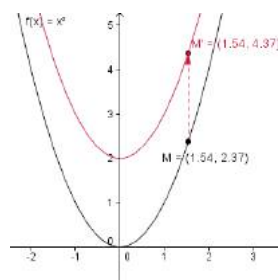
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1729>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Μετατοπίσεις της  $\psi = ax^2$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά από τους μαθητές για την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση της  $\psi = ax^2$  αλλά και την εύρεση του τύπου της στη νέα θέση και να πειραματιστούν για τον συνδυασμό των δύο παραπάνω μετατοπίσεων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1748>



### §7.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Να δοθεί έμφαση στη χάραξη και διερεύνηση της γραφικής παράστασης συγκεκριμένων πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και στη διαισθητική μελέτη της μονοτονίας, των ακρότατων και της συμμετρίας της συνάρτησης με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. Η γενίκευση των παραπάνω εννοιών θα διδαχτούν στην Β Λυκείου.

Ειδικότερα, όσον αφορά στη χάραξη της γραφικής παράστασης και στη μελέτη της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ , η ιδέα που βρίσκεται και πίσω από τη δραστηριότητα Δ.30 του ΑΠΣ είναι η εξής: Οι μαθητές χρησιμοποιούν είτε πίνακες τιμών είτε λογισμικό για να χαράξουν τη γραφική παράσταση

της  $\psi = \alpha x^2 + \kappa$  και να την συγκρίνουν με την  $\psi = \alpha x^2$ , ομοίως για την  $\psi = \alpha(x+\lambda)^2$  και τελικά για την  $\psi = \alpha(x+\lambda)^2 + \kappa$ . Με αυτόν τον τρόπο εισάγονται διαισθητικά στις μετατοπίσεις, τις οποίες θα γενικεύσουν στην Β Λυκείου. Αν χρησιμοποιηθεί λογισμικό, οι μαθητές μπορούν αφού χαράξουν τη γραφική παράσταση της  $g(x) = \alpha x^2$  για διάφορες τιμές του  $\alpha$  να την μετατοπίσουν  $\kappa$  μονάδες οριζόντια για διάφορες τιμές του  $\kappa$  (π.χ. κατά 3 μονάδες αριστερά, κατά 4 μονάδες δεξιά) και να παρατηρήσουν τη μορφή που παίρνει ο τύπος της συνάρτησης. Στη συνέχεια να μετατοπίσουν  $\lambda$  μονάδες κατακόρυφα για διάφορες τιμές του  $\lambda$  (π.χ. κατά 2 μονάδες κάτω, κατά 5 μονάδες πάνω) και να κάνουν ανάλογες παρατηρήσεις. Συνδυάζοντας τις δύο μετατοπίσεις μπορούν να παρατηρήσουν ότι η συνάρτηση που θα προκύψει θα είναι της μορφής  $f(x) = \alpha(x+\kappa)^2 + \lambda$ .

Τέλος, δίνονται στους μαθητές συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  και εκείνοι προσπαθούν, με κατάλληλες μετατοπίσεις της  $g(x) = \alpha x^2$ , να οδηγηθούν στη γραφική παράσταση της  $f$ . Στη συνέχεια μελετούν, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης, ιδιότητες της  $f$  και επεκτείνουν τα συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της  $g(x) = \alpha x^2$  στην  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Επίσης, να γίνει γεωμετρική ερμηνεία των συμπερασμάτων των §3.3 και §4.2(ρίζες και πρόσημο τριωνύμου) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.32 του ΑΠΣ). Διδακτικά έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να σχεδιαστούν οι έξι βασικές περιπτώσεις που αφορούν στις τιμές της διακρίνουσας ( $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$  και  $\Delta < 0$ ) συνδυαζόμενες με το πρόσημο του  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$ ) ώστε οι μαθητές να συνδέσουν τη γραφική παράσταση με τα αλγεβρικά συμπεράσματα που ήδη χρησιμοποιούν

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων:  $\varphi(x) = x^2$ ,  $f(x) = (x-3)^2$ ,  $g(x) = (x+3)^2$ .

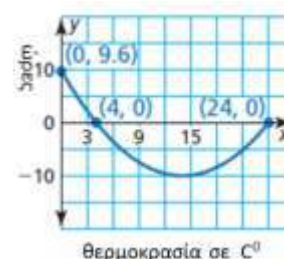
$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\varphi(x) = x^2$					0				
$f(x) = (x-3)^2$								0	
$g(x) = (x+3)^2$		0							

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $\varphi$ ,  $f$  και  $g$ .

γ) Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$ , δίνει τη γραφική παράσταση της  $f$  και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  δίνει τη γραφική παράσταση της  $g$ .

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το  $x$  είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το  $y$  είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).



α) Βρείτε τη συνάρτηση  $f$  που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξανανοίξτε τον).

## Άλγεβρα Α΄ Τάξης Εσπερινού ΓΕΛ

1. Η Διδακτέα –εξεταστέα ύλη ταυτίζεται με αυτή της Α΄ Τάξης του Ημερησίου ΓΕΛ .
2. Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Α΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

Από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου»

### **Εισαγωγικό Κεφάλαιο §Ε.2**

(Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα

#### **Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 13 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

#### **Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

**Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στο διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να**

**δίδεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου, ( εννοιών και μεθόδων ) της κάθε παραγράφου**

## **Γεωμετρία Α΄ Τάξης Ημερήσιου Γενικού Λυκείου**

### **ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ**

#### **I. Εισαγωγή**

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στο θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους μαθητές, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Επίσης οι μαθητές χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μνηθούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Η κατασκευή από τους μαθητές αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους μαθητές. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

#### **II. Διδακτέα Ύλη**

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ ΓΕΛ Τεύχος Α΄» των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ., Σίδηρη Π.

#### **Κεφ.1<sup>ο</sup>: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία**

- 1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
- 1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

#### **Κεφ.3<sup>ο</sup>: Τρίγωνα**

- 3.1. Είδη και στοιχεία τριγώνων
- 3.2. 1<sup>ο</sup> Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.3.2<sup>ο</sup> Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.4. 3<sup>ο</sup> Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.6. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (εκτός της απόδειξης των θεωρημάτων I και II).
- 3.7. Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος
- 3.10. Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.11. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

- 3.12. Τριγωνική ανισότητα (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.13. Κάθετες και πλάγιες (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος II)
- 3.14. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος I)
- 3.15. Εφαπτόμενα τμήματα
- 3.16. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων
- 3.17. Απλές γεωμετρικές κατασκευές
- 3.18. Βασικές κατασκευές τριγώνων

#### **Κεφ.4<sup>ο</sup>: Παράλληλες ευθείες**

- 4.1. Εισαγωγή
  - 4.2. Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα (εκτός της απόδειξης του Πορίσματος II της σελ. 81, και των προτάσεων I, II, III και IV)
  - 4.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες
  - 4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου
  - 4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου
  - 4.8. Άθροισμα γωνιών κυρτού  $n$ -γώνου (Εκτός της απόδειξης του Πορίσματος)
- Ιστορικό Σημείωμα

#### **Κεφ.5<sup>ο</sup>: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία**

- 5.1. Εισαγωγή
- 5.2. Παραλληλόγραμμα
- 5.3. Ορθογώνιο
- 5.4. Ρόμβος
- 5.5. Τετράγωνο
- 5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα (εκτός της απόδειξης του Θεωρήματος III)
- 5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου (Χωρίς το Πόρισμα).
- 5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου
- 5.10. Τραπεζίο
- 5.11. Ισοσκελές τραπέζιο

#### **Κεφ.6<sup>ο</sup>: Εγγεγραμμένα σχήματα**

- 6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί
- 6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης (Εκτός της απόδειξης του θεωρήματος )
- 6.4. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο –Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία.
- 6.5. Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο
- 6.6. Το εγγράψιμο τετράπλευρο (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)

### **III. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κλπ περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α Λυκείου που ισχύει (ΥΑ 59614/Γ2, ΦΕΚ 1168/8–6–2011) Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

#### **Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)**

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής

Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιοπιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΕΓ1 του ΑΠΣ).

Για να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.

### **Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)**

#### **§3.1, §3.2 (Να διατεθούν 2 ώρες)**

#### **§3.3, §3.4 (Να διατεθούν 3 ώρες)**

#### **§3.5, §3.6 (Να διατεθούν 3 ώρες)**

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων 3.1 έως 3.6 στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια νέα στοιχεία όπως:

- α) Η σημασία της ισότητας των ομόλογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.
- β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία -τρίγωνα- δεν είναι ίσα (δύο τρίγωνα με ίσες δυο πλευρές και μια μη περιεχόμενη γωνία αντίστοιχα ίση, όπως στις δραστηριότητες Δ.5 και Δ.7 του ΑΠΣ).
- γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.
- δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών.
- ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο σελ.43).
- στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων για σύγκριση σε «σύνθετα» σχήματα (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.6 του ΑΠΣ).
- ζ) Η σημασία της «βοηθητικής γραμμής» στην αποδεικτική διαδικασία (πόρισμα Ι της §.3.2). Προτείνεται να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα Ι σελ.42, πόρισμα Ι σελ.45, πόρισμα Ι σελ.50).

Μαζί με την πρόταση αυτή προτείνεται να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της σελ.61 για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Επίσης, σαν μια ενιαία πρόταση, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1i Εμπέδωσης σελ. 48, άσκηση 4 Εμπέδωσης σελ.54). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα IV της §3.2 και III, IV της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων.

Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τόπων προτείνεται τα πορίσματα III της §3.2 και II της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα IV της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ.8, Δ.9 και Δ.10 του ΑΠΣ).

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

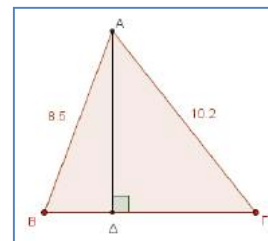
Με το μικροπείραμα «3ο κριτήριο ισότητας τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια της ισότητας των τριγώνων. Αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το κατασκευαστικό περιβάλλον του Χελωνόκοσμου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5821>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Ύψος, Διάμεσος και διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές οδηγούνται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της σχέσης που συνδέει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλα μαθαίνουν για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2277>

### §3.7 (Να διατεθεί 1 ώρα)

### §3.10 - §3.13 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους μαθητές. Να επισημανθεί στους μαθητές ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.12 του ΑΠΣ). Στόχος είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν την αναγκαιότητά της, αλλά και τη λειτουργικότητά της, για την κατασκευή ενός τριγώνου.

Επίσης, προτείνονται οι ασκήσεις 4 και 6 (Αποδεικτικές), που διαπραγματεύονται την απόσταση σημείου από κύκλο και σχέσεις χορδών και τόξων αντίστοιχα.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Αν δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη 5 και 9:

- Να δώσετε ενδεικτικές τιμές για την τρίτη πλευρά,
- Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το μήκος της τρίτης πλευράς.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  και δύο σημεία  $A, B$  εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$  της ευθείας, για το οποίο:

- Το άθροισμα  $AM+BM$  γίνεται ελάχιστο,
- η διαφορά  $AM-MB$  γίνεται μέγιστη.

Να λύσετε το πρόβλημα στην περίπτωση που τα  $A$  και  $B$  βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και στην περίπτωση που βρίσκονται προς την ίδια μεριά.

Υπάρχει σημείο  $M$ , ώστε το άθροισμα να γίνει μέγιστο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπάρχει σημείο  $M$ , ώστε η διαφορά να γίνει ελάχιστη; Αν ναι, ποιο;

[Σχόλιο-στόχος: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ανισοτικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο σε επίλυση προβλήματος]

### §3.14 - §3.16 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους μαθητές από το Γυμνάσιο. Οι αιτιολογήσεις, όμως, προέρχονται από τα θεωρήματα της §3.13. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους μαθητές και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν (προτείνονται οι Δ.14 και Δ.15 του ΑΠΣ).

### §3.17, §3.18 (Να διατεθεί 1 ώρα)

Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18.

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

### §4.1, §4.2, §4.3, §4.5 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα της σελ. 96 καθώς επίσης και στη δραστηριότητα Δ.16 του ΑΠΣ. Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν την αδυναμία χρήσης του ορισμού και τη σημασία των προτάσεων της §4.2 (που προηγούνται του «αιτήματος παραλληλίας») ως εργαλεία για την απόδειξη της παραλληλίας δύο ευθειών. Προτείνεται να διερευνηθούν οι μαθητές τη σχέση του θεωρήματος της §4.2 και της Πρότασης Ι της σελ. 82 με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.

Προτείνεται, πριν τη διαπραγμάτευση των θεωρημάτων της παραγράφου 4.5 να επισημανθεί η στρατηγική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με το πώς δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γιατί δεν είναι οικεία στους μαθητές, διαδικασία η οποία αναδεικνύεται με τις αποδείξεις των θεωρημάτων της παραγράφου.

### §4.6, §4.8 (Να διατεθούν 3 ώρες)

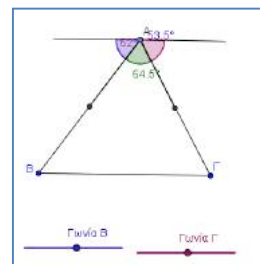
Προτείνεται το θεώρημα της §4.6 να συνδεθεί με τα πορίσματα της σελ. 59, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ισχυρότερο από τα πορίσματα και ότι αυτό οφείλεται στη χρήση του «αιτήματος παραλληλίας» στην απόδειξή του. Το ίδιο ισχύει και για το πόρισμα (i) της σελ. 89 σε σχέση με το Θεώρημα της σελ. 59.

Προτείνεται οι μαθητές, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.α., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση (προτείνεται η δραστηριότητα που αντιστοιχεί στο στόχο ΠΕ4 του ΑΠΣ). Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί, επίσης, η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Με το μικροπείραμα «Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και οδηγούνται σταδιακά από την διαίσθηση στην τυπική απόδειξη του σχετικού θεωρήματος.

<http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2265>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα. Στη στήλη «Τρίγωνα» να συμπληρώσετε τον αριθμό των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το πολύγωνο από διαγώνιους που άγονται από μία κορυφή του.

Αριθμός πλευρών	Τρίγωνα	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
...		
n		

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου;

[Σχόλιο: Αυτή η δραστηριότητα αποσκοπεί στην δημιουργία εικασίας, που θα οδηγήσει στην απόδειξη του τύπου.]

### Ιστορικό Σημείωμα (Να διατεθούν 1 έως 2 ώρες)

Στο ιστορικό σημείωμα αναδεικνύεται η σημασία του 5ου αιτήματος στην δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάζεται η συζήτηση και οι αναζητήσεις που προκάλεσε η διατύπωσή του, μέχρι τον 19ο αιώνα, και που τελικά οδήγησαν στη δημιουργία των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Προτείνεται, η θεματολογία του ιστορικού σημειώματος, να χρησιμοποιηθεί για να

γίνουν σχετικές εργασίες από τους μαθητές.

**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε

### Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

#### §5.1, §5.2 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ.18 του ΑΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο. Για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αξιοποιηθεί η δραστηριότητα Δ.19 του ΑΠΣ.

#### Προτεινόμενη εργασία:

Να επιλέξετε ένα από τα κριτήρια που καθιστούν ένα τετράπλευρο, παραλληλόγραμμο.

Θεωρώντας το κριτήριο που επιλέξατε ως ορισμό, να αποδείξετε τον παλιό ορισμό και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

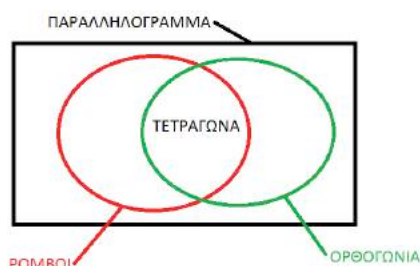
[Σχόλιο: Με αυτή την εργασία, οι μαθητές διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες και τα κριτήρια και εξετάζουν το ισοδύναμο μεταξύ ορισμού και κριτηρίου]

#### §5.3 - §5.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1) στην άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος, καθώς και να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (δραστηριότητες Δ.20, Δ.21 και Δ.22 του ΑΠΣ).

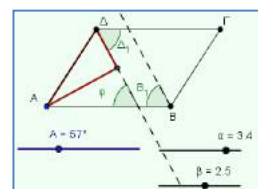
#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινόμησης των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή.



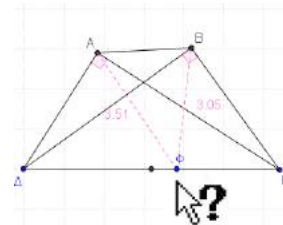
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825>

#### §5.6 – §5.9 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που

ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση της Εφαρμογής 1 της σελ. 106. Προτείνεται να ζητηθεί από τους μαθητές να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.

Προτείνεται η απόδειξη του θεωρήματος της παραγράφου 5.7 να αποτελέσει αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη με στόχο την ανάδειξη των μεθοδολογικών στοιχείων της.



Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με την διάμεσο που αντιστοιχεί σ' αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή». <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781>

#### **§5.10, §5.11 (Να διατεθούν 5 ώρες)**

Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους μαθητές η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 125) και, κατά την κρίση του εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα των σελ. 123, 124.

#### **Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)**

##### **§6.1 – §6.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)**

Στόχος είναι οι μαθητές να χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε επίλυση προβλημάτων, καθώς και να αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Επίσης να χρησιμοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος της §6.3 (γωνία χορδής και εφαπτομένης).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να βρείτε το μέτρο της γωνίας δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων κύκλου (προτείνεται η δραστηριότητα να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας).

##### **§6.4 – §6.6 (Να διατεθούν 5 ώρες)**

Να γίνει απλή αναφορά στην παράγραφο 6.4 (τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία).

Προτείνεται, ως εισαγωγή στο πρόβλημα εγγραψιμότητας ενός τετραπλεύρου σε κύκλο, οι μαθητές να διερευνήσουν ποια από τα γνωστά τετράπλευρα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο) είναι εγγράψιμα, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων (π.χ., ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος σε κύκλο, γιατί αν ήταν εγγράψιμος θα έπρεπε να έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές). Η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε τυχαία τετράπλευρα (και με τη βοήθεια λογισμικού), ώστε οι μαθητές να εικάσουν τα κριτήρια εγγραψιμότητας.

Επίσης, στόχος είναι οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ των θεωρημάτων που ισχύουν για τα εγγράψιμα τετράπλευρα και στα κριτήρια, που πρέπει να ισχύουν, ώστε να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο (ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

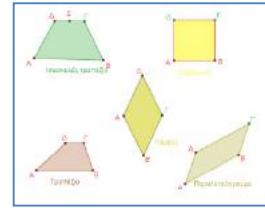
Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ τα ύψη του AD, BE, ΓΖ τέμνονται στο Η. Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ.

(α) Να βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που σχηματίζονται.

(β) Να αποδείξετε ότι τα ύψη του τριγώνου ABΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ.

Ενδεικτική (ψηφιακή) δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 6 προτείνεται να διερευνηθεί με το μικροπείραμα «Εγγράψιμα τετράπλευρα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2264>



και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>. Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξετε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξαναοίξετε τον).

## Γεωμετρία Α΄ Τάξης Εσπερινού ΓΕΛ

**Η Διδακτέα –εξεταστέα ύλη καθώς και η διαχείριση της ταυτίζεται με αυτή της Α΄ Τάξης του Ημερήσιου ΓΕΛ .**

## ΑΛΓΕΒΡΑ

- Β΄ Τάξης Ημερησίου ΓΕΛ
- Β΄ Τάξης Εσπερινού ΓΕΛ
- Γ΄ Τάξης Εσπερινού ΓΕΛ

### ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου»

#### **Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα**

1.1 Γραμμικά Συστήματα (χωρίς τις αποδείξεις των συμπερασμάτων της υποπαραγράφου «Λύση-Διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2x2)

1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

#### **Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων**

2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρικές Συνάρτησης

2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

#### **Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία**

3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες (χωρίς την απόδειξη της ταυτότητας 4)

3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων)

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων)

#### **Κεφ. 4ο: Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις**

4.1 Πολυώνυμα

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

#### **Κεφ. 5ο: Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση**

5.1 Εκθετική συνάρτηση

5.2 Λογάριθμοι (χωρίς την απόδειξη του τύπου αλλαγής βάσης)

5.3 Λογαριθμική συνάρτηση (να διδαχθούν μόνο οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση το 10 και το e).

### II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό

που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

Πριν την έναρξη της διδασκαλίας της ύλης της Β Τάξης ΓΕΛ , προτείνεται να διατεθούν έως 5 διδακτικές ώρες για επανάληψη – ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης της Α΄ Λυκείου από το βιβλίο «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου».

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η διδασκαλία της ύλης της Β Λυκείου

## Κεφάλαιο 1ο

(Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

### §1.1. Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από το γυμνάσιο είναι γνωστή η έννοια των γραμμικών συστημάτων 2Χ2, η γραφική επίλυσή τους και η αλγεβρική επίλυση με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Με τη μέθοδο των οριζουσών να γίνουν μόνο αριθμητικά παραδείγματα.

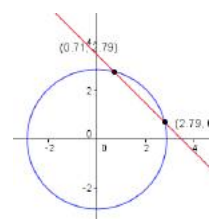
### §1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Προτείνεται η επίλυση απλών μη γραμμικών συστημάτων με 2 αγνώστους, καθώς και η έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις 4 και 5 της Β΄ Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Εισαγωγή στα μη γραμμικά συστήματα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εισαχθούν στην έννοια του μη γραμμικού συστήματος και να πειραματιστούν με τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5281>



## Κεφάλαιο 2ο

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

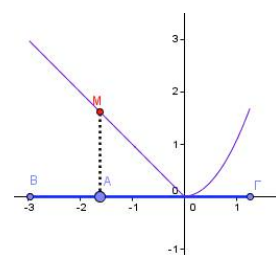
### §2.1 και 2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Στην Α΄ Λυκείου οι μαθητές μελέτησαν την  $f(x)=ax^2+bx+c$ , μέσω μετατοπίσεων της  $g(x)=ax^2$  και εξέτασαν τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους. Η έμφαση πρέπει να δοθεί στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών της μονοτονίας, των ακροτάτων και της άρτιας – περιττής και στη σύνδεση της γεωμετρικής ερμηνείας με την αλγεβρική έκφραση.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα « Συμμεταβολή σημείων - Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή σημείων και διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμεταβολής των δύο σημείων, της μονοτονίας και των ακροτάτων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5226>



## Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 25 διδακτικές ώρες)

### §3.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές στο γυμνάσιο έχουν συναντήσει και ασχοληθεί με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στήριζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόηση και συνεχή χρήση του. Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία, με  $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$ . Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

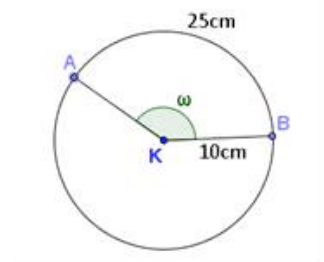
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\varphi$  με  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$  και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία  $\omega$ .

α) Να βρείτε το μέτρο της  $\omega$  σε rad.

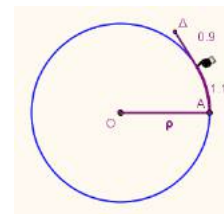
β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας  $\omega$  είναι αρνητικό.



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Τι είναι το ακτίνιο;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την κατανόηση της έννοιας του ακτινίου και τη σύνδεση μεταξύ της μέτρησης γωνιών σε μοίρες και ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο.

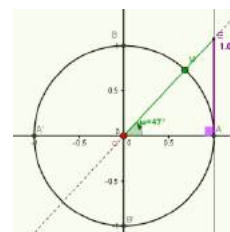
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5272>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 4:

Με το μικροπείραμα «Ο τριγωνομετρικός κύκλος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές εισάγονται στον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου και των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5140>



### §3.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Ο στόχος της παραγράφου είναι η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών και για αυτό οι μαθητές θα πρέπει να εμπλακούν με απλές ασκήσεις υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών όταν είναι γνωστός ο ένας και απλές αποδείξεις σχέσεων. Να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10-13 της Α΄ Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $\eta\mu\theta = \frac{1}{4}$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{4}$ ;

β) Υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$ ;

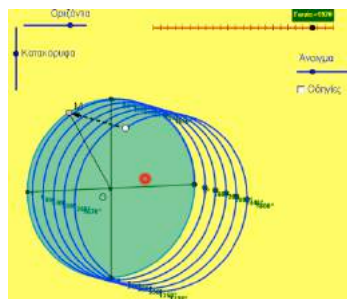
Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ  $0^\circ$  και  $360^\circ$  υπάρχουν;

### §3.3 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Η ανάδειξη του τριγωνομετρικού κύκλου σε (δηλαδή του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών) στο βασικό εργαλείο αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να αντικαταστήσει την απομνημόνευση τύπων και την αναπαραγωγή κανόνων χωρίς νόημα. Αυτό μπορεί να γίνει αν ενθαρρυνθούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις συμμετρίες σε νοητό τριγωνομετρικό κύκλο. Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας. Οι ερωτήσεις κατανόησης I και II μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συζητηθούν και να διευκρινιστούν πτυχές των προηγούμενων ενοτήτων της τριγωνομετρίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με το μικροπείραμα «Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που ανάγονται στο 2ο τεταρτημόριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές βρίσκουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που η προβολή τους στον πρώτο κύκλο είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο. Με τη βοήθεια του λογισμικού μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές βρίσκουν στην αριθμογραμμή μια συγκεκριμένη γωνία που ξεπερνά τον πρώτο κύκλο και βλέπουν την γεωμετρική της αναπαράσταση πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Στη συνέχεια, μπορούν να δουν το τόξο αυτό στο χώρο, βρίσκουν την προβολή του στον πρώτο κύκλο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής, αφού την αναγάγουν σε γωνία του πρώτου τεταρτημορίου. Τέλος, εφαρμόζουν τη στρατηγική αυτή και σε άλλες γωνίες.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5275>

### §3.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχτούν οι μαθητές στη Β Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορεί να

στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Αφού συζητηθούν τα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου, να τονισθούν τα συμπεράσματα που περιέχονται στο Σχόλιο της σελίδας 81.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1, 3, 4, 5, 6 και 7 της Α' Ομάδας και 1, 2 και 3 της Β' Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτινίου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της  $O$  και θεωρούμε ένα σημείο της  $P$ , το οποίο τη χρονική στιγμή  $0$  βρίσκεται στο σημείο  $(1,0)$ .

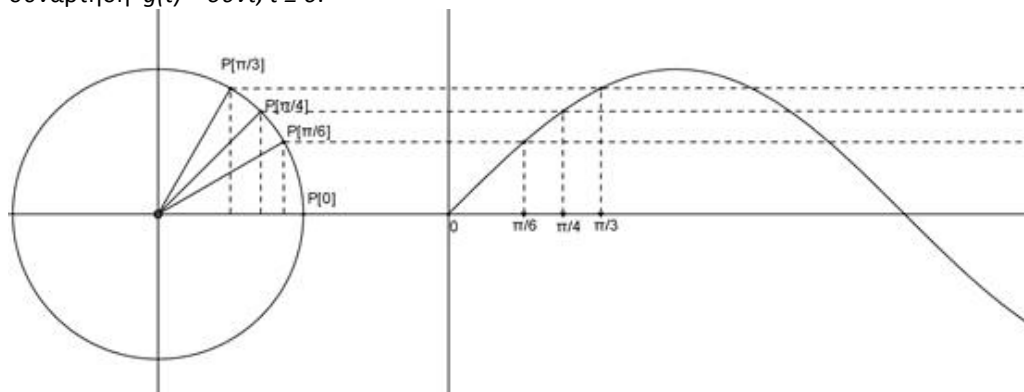
α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου  $P$  σε σχέση με τον άξονα  $x$  κάθε χρονική στιγμή  $t$  (σε sec),  $t \geq 0$  δίνεται από τη συνάρτηση  $f(t) = \eta \mu t$ ,  $t \geq 0$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(t)$  στο διάστημα  $[0, 4\pi]$ .

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές  $t$  με  $0 \leq t \leq 4\pi$  κατά τις οποίες το σημείο  $P$  βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.

δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ  $0$  και  $4\pi$  sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου  $P$  είναι μεγαλύτερο του  $0,5$ .

ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο  $K$  της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή  $0$  βρίσκεται στη θέση  $(0,1)$ . Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου  $K$  κάθε χρονική στιγμή  $t$  sec δίνεται από τη συνάρτηση  $g(t) = \sigma \nu \eta t$ ,  $t \geq 0$ .



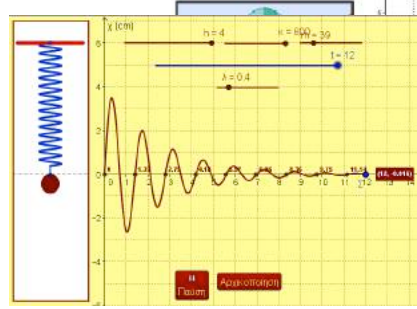
#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Περιοδικά φαινόμενα: Η παλίρροια» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία (άσκηση 2, Β' ομάδας), οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης μελετούν το φαινόμενο της παλίρροιας και αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165>

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Περιοδικές συναρτήσεις - Το ελατήριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των περιοδικών συναρτήσεων. Επίσης, πειραματίζονται με ένα ελατήριο και αναζητούν απαντήσεις με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5208>

### §3.5 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό αλγεβρικό εργαλείο και είναι το πρώτο είδος μη πολυωνυμικών εξισώσεων που συναντούν οι μαθητές. Η ερμηνεία των τύπων λύσεων πρέπει να στηριχτεί τόσο στον τριγωνομετρικό κύκλο όσο και στη γραφική παράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Προτείνεται να μην γίνουν η άσκηση 11(ii) της Α΄ Ομάδας και όλες οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία  $\omega$  (σε rad), με  $0 \leq \omega < 2\pi$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\omega > 0$ .

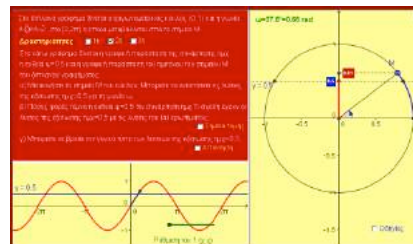
Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\phi$  με  $0 \leq \phi < 2\pi$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\eta\mu\phi = \frac{1}{2}$  και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξίσωση  $\eta\mu x = a$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές βρίσκουν τις λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης στον τριγωνομετρικό κύκλο και μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεδεμένων γεωμετρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, γενικεύουν τις λύσεις αυτές σ' όλο το  $\mathbb{R}$ . Στη συνέχεια δημιουργούν τις δικές τους εξισώσεις και τις λύνουν επαληθεύοντας ταυτόχρονα τις λύσεις τους γραφικά.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5141>

### §3.6- & 3.7: Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Η διδασκαλία της παραγράφου 3.6 να περιορισθεί σε απλές εφαρμογές των τύπων μέσα από λίγες και απλές ασκήσεις Α ομάδας. Από την παράγραφο 3.7 να διδαχθούν μόνο οι τύποι (1), (2), (3) ως εφαρμογές της παραγράφου 3.6, και να μην γίνουν ασκήσεις. Να μην διδαχθούν οι τύποι (4), (5) και

(6) (τύποι αποτετραγωνισμού).

#### Κεφάλαιο 4ο

(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

Όλη η διδασκαλία των πολυωνύμων θα πρέπει να εμπλουτιστεί – αν όχι να εστιαστεί – με την συναρτησιακή προσέγγιση των πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση α) θα παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα πρόσβασης σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις (όπως είναι η γραφική παράσταση συνάρτησης) που μπορούν να βοηθήσουν στην απόδοση νοήματος και την κατανόηση και β) θα μειώσει το ρόλο αφηρημένων αλγεβρικών προσεγγίσεων των πολυωνύμων που δεν συνδέονται με την κατανόηση ούτε με την περαιτέρω διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

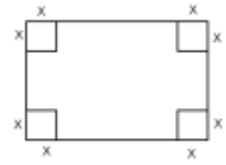
#### §4.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Προτείνεται να παρουσιαστούν (είτε με λογισμικό, είτε με έντυπη μορφή) οι γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων όπως οι  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = -x^3$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ . Στόχος είναι η παρατήρηση και ο σχολιασμός των ιδιοτήτων τους, των σημείων τομής με τους άξονες, των τμημάτων που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα των  $x$ , κοκ.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 και 2, 5 και 6 της Α' Ομάδας και 2, 3 και 5 της Β' Ομάδας.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

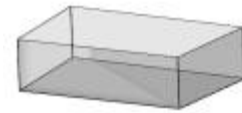
Από ένα χαρτόνι διαστάσεων  $20 \times 30$  εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς  $x$  (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.



α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το  $x$ ;

β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το  $x$ , μειώνεται ο όγκος.

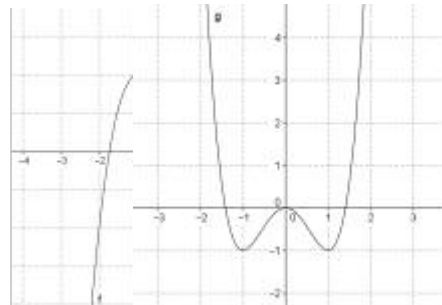
Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.



γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το  $x$  ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^3 - 3x$  και  $g(x) = x^4 - 2x^2$  χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,



α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των  $f$  και  $g$ .

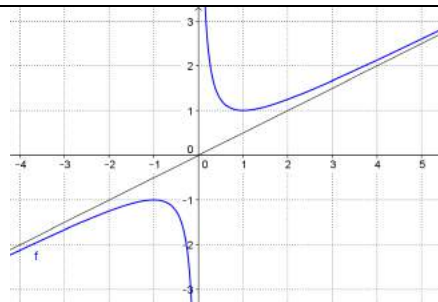
β) Είναι κάποια συνάρτηση άρτια ή περιττή;

γ) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς  $g(-2)$ ,  $g(-0,5)$ ,  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(1,5)$ .

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$  και την ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$

χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,



α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

β) να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

γ) να βρείτε από τη γραφική παράσταση (κατά προσέγγιση) τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 2$ . Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

δ) να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $c$  η εξίσωση  $f(x) = c$  έχει λύσεις και πόσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $a$  η ευθεία  $y = ax$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$ .

στ) να βρείτε γραφικά και αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης  $\frac{x^2 + 1}{2x} > \frac{1}{2}$

#### §4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση των θεωρημάτων της υποπαραγράφου "Διαίρεση πολυωνύμου με  $x-r$ " και πιο συγκεκριμένα, στη μεταξύ τους σχέση και στη συνέπεια που έχουν για τη παραγοντοποίηση πολυωνύμου. Για το σχήμα Horner καλό είναι να εξηγηθεί η σχέση του με τους συντελεστές που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της διαίρεσης (όπως στο εισαγωγικό παράδειγμα του σχολικού βιβλίου ή με άλλο αριθμητικό παράδειγμα)

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις 1 (i, iv), 2, 3 και 10 της Α' Ομάδας. Να μη γίνουν οι ασκήσεις 1, 2 και 5 της Β' Ομάδας.

#### §4.3 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2. Αν και οι ακέραιες ρίζες ενός τυχαίου πολυωνύμου δεν εμφανίζονται συχνά, παρόλα αυτά το θεώρημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ωστόσο, για τη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης, έμφαση πρέπει να δοθεί στην προτεραιότητα της παραγοντοποίησης του αντίστοιχου πολυωνύμου.

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο αριθμητικό εργαλείο που μπορεί να συνδεθεί με τον τρόπο που θα μπορούσε να προσδιορίσει κανείς μη ακέραια ρίζα αν είχε στη διάθεσή του κάποια υπολογιστική μηχανή. Κυρίως όμως, αυτή η μέθοδος, επειδή στηρίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano, υποστηρίζει την συναρτησιακή προσέγγιση και την οπτικοποίηση των σχετιζόμενων εννοιών.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα: Οι ασκήσεις 1, 4, 5, 6 και 8 της Α' Ομάδας και προβλήματα της Β' Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

##### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή  $x$  μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος  $K(x) = -2x^2 + 120x + 100$  χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των χμονάδων της αποφέρει έσοδα  $E(x) = x^3 - x^2 + 20x$  χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράξει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

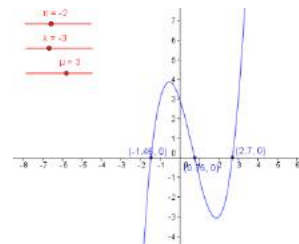
β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $x^3 + 2x - 2 = 0$  έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν τη σχέση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού, με τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5229>

#### §4.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Στην ενότητα αυτή επιλύονται εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές, όπως άρρητες και κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις. Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων.

Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x+3} = x+1$  ( $E_1$ ).

β) Να λύσετε την εξίσωση  $x+3 = (x+1)^2$  ( $E_2$ )

γ) Να εξηγήσετε γιατί η  $E_1$  και η  $E_2$  δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, αν και η  $E_2$  προκύπτει από την  $E_1$  αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

δ) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις του α) και του β) ερωτήματος.

### Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 22 διδακτικές ώρες)

#### §5.1 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Η έννοια της εκθετικής μεταβολής που συνδέεται με σημαντικά φαινόμενα της πραγματικότητας, μπορεί να αποτελέσει την εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση. Αν και συχνά στα πραγματικά φαινόμενα που μελετάμε, οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι διακριτές (συχνά είναι φυσικοί αριθμοί), τέτοια φαινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετάβαση στην εκθετική συνάρτηση, δηλαδή σε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς. Η έμφαση στη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης πρέπει να είναι στα προβλήματα και στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης όπως

προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στα προβλήματα της Β' Ομάδας, με προτεραιότητα στις 6, 7 και 8.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται διχοτόμηση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο "θυγατρικά κύτταρα". Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (salmonella), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 °C διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι 35 °C.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν α) 1200 βακτήρια , β) 4.550 βακτήρια και γ) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές για α) για το χρόνο και β) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους μαθητές να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) το πεδίο ορισμού, β) το σύνολο τιμών, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες, δ) τη μονοτονία, ε) τις ασύμπτωτες και στ) τη συμμετρία.

➤  $f_1(x) = 2^x$ ,  $f_2(x) = 3 \cdot 2^x$ ,  $f_3(x) = -3 \cdot 2^x$ ,  $f_4(x) = 4 \cdot 2^x$ .

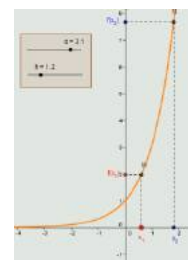
➤  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ .

➤  $f_1(x) = 2^x$ ,  $f_2(x) = 2^x + 3$ ,  $f_3(x) = 2^{x-3}$ ,  $f_4(x) = 2^{x-3} + 3$

➤  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Η μονοτονία μιας εκθετικής συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές διερευνούν την έννοια της μονοτονίας και τη μελέτη της μονοτονίας μιας εκθετικής συνάρτησης. Με τη βοήθεια του λογισμικού μεταβάλλουν τη βάση μιας εκθετικής συνάρτησης και παρατηρώντας τη γραφική της παράσταση βρίσκουν τη μονοτονία της με τη βοήθεια του ορισμού.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5238>

### §5.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Η κατανόηση των λογαρίθμων και των ιδιοτήτων τους μπορεί να στηριχτεί στον ορισμό του λογαρίθμου και στις ήδη γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Μια προσπάθεια απομνημόνευσης τύπων και τεχνασμάτων χωρίς νόημα δεν είναι αποδοτική και δεν ενθαρρύνεται. Έμφαση πρέπει να δοθεί στα παραδείγματα 1 και 2 που περιγράφουν την κλίμακα Richter για τη μέτρηση των σεισμών και το pH για την οξύτητα ενός διαλύματος.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α' Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα και οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β' Ομάδας. Προτείνεται να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης  $I$ , η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα  $L$  του ήχου. Για την ακουστότητα  $L$  χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση  $I$  το  $\text{watt/m}^2$ .

Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα  $L$  σχετίζεται με την ένταση  $I$  με λογαριθμικό τρόπο, σύμφωνα με τον τύπο  $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ , όπου  $I_0$  η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί

να ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με  $10^{-12} \text{ watt/m}^2$ . Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α)  $10^{-6} \text{ watt/m}^2$  και β) δεκαπλάσιας από το  $I_0$ .

### §5.3 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

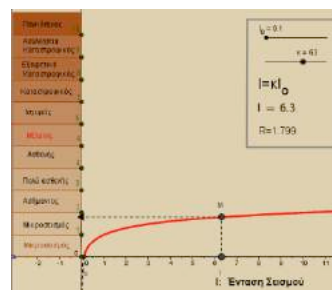
Κατ' αντιστοιχία με την εκθετική συνάρτηση, έμφαση θα πρέπει να δοθεί σε προβλήματα και στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις  $f(x)=\log x$  και  $f(x)=\ln x$ . Ωστόσο, για λόγους κατανόησης της σχέσης με την αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσαν να αναφερθούν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση  $a$ , με  $0 < a < 1$ , σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διδακτέα ύλη περιορίζεται στις  $f(x)=\log x$  και  $f(x)=\ln x$ . Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της Α' Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα « Λογαριθμική μεταβολή – Κλίμακα Richter» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της λογαριθμικής μεταβολής. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μεγέθους ενός σεισμού σε κλίμακα Richter ως προς την έντασή του, δημιουργούν εικασίες σχετικά με τη σχέση που έχουν αυτά τα δύο μεγέθη και τις αποδεικνύουν αλγεβρικά. Στη συνέχεια, συγκρίνουν τις εντάσεις σεισμών που έχουν συμβεί στο παρελθόν και λύνουν τα προβλήματα γραφικά και αλγεβρικά.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5240>



**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.
- Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξαναοίξτε τον).

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### • Β΄ Τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ

#### ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ-ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ ΓΕΛ Τεύχος Β » των. Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

#### **Κεφ. 7<sup>ο</sup>: Αναλογίες**

7.1. Εισαγωγή

7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες

7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο (χωρίς την απόδειξη της Πρότασης και χωρίς την υποπαράγραφο “Διερεύνηση”)

7.7. Θεώρημα του Θαλή (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος και χωρίς τους ορισμούς «συζυγή αρμονικά» και «αρμονική τετράδα»)

7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και χωρίς τον υπολογισμό των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία η διχοτόμος – εσωτερική ή εξωτερική – διαιρεί την απέναντι πλευρά)

#### **Κεφ. 8<sup>ο</sup>: Ομοιότητα**

8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

8.2. Κριτήρια ομοιότητας (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων I, II και III και τις εφαρμογές 1, 2 και 3)

#### **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:**

Να μην διδαχθούν οι αποδεικτικές ασκήσεις, τα σύνθετα θέματα και οι γενικές ασκήσεις από τα κεφάλαια 7 και 8.

#### **Κεφ. 9<sup>ο</sup>: Μετρικές σχέσεις**

9.1. Ορθές προβολές

9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα

9.3. Γεωμετρικές κατασκευές

9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος ( χωρίς την εφαρμογή 2)

#### **Κεφ. 10<sup>ο</sup>: Εμβαδά**

10.1. Πολυγωνικά χωρία

10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (χωρίς την απόδειξη των τύπων I και III)

10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων (χωρίς την απόδειξη του Θεωρήματος II)

#### **Κεφ. 11<sup>ο</sup>: Μέτρηση Κύκλου**

11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου

11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του Πορίσματος)

11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους (χωρίς τις εφαρμογές 2,3)

11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.5. Μήκος τόξου

11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

#### **Κεφ. 12<sup>ο</sup>: Ευθείες και επίπεδα στο χώρο**

12.1. Εισαγωγή

- 12.2. Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του
- 12.3. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων
- 12.4. Ευθείες και επίπεδα παράλληλα – Θεώρημα του Θαλή
- 12.5. Γωνία δύο ευθειών – Ορθογώνιες ευθείες
- 12.6. Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων

## II. Διαχείριση διδακτέας ύλης

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www.iep.edu.gr/neosxoleiops/index.php> ]

### Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Στις παραγράφους αυτές γίνεται πρώτη φορά λόγος για σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της ασυμμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τους μαθητές να ξεκαθαρίσουν την έννοια του αρρήτου αριθμού.

Επίσης, στόχοι της διδασκαλίας, της παραγράφου είναι:

- ✓ Να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών και να δοθεί έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή και στα Θεωρήματα διχοτόμων.
- ✓ Μέσω παραδειγμάτων να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μηκών είναι δυνατόν να έχουν τον ίδιο λόγο.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή, σε δοσμένα σχήματα, ή σε σχήματα που χρειάζεται να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες. Να αναδειχθούν οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε τρίγωνα και τραπέζια.
- ✓ Με χρήση των θεωρημάτων διχοτόμου, οι μαθητές να διαπιστώσουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθύγραμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή την προέκτασή του

(Προτείνεται, αν το επιτρέπει ο διαθέσιμος χρόνος, να γίνει απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή, για συγκεκριμένο λόγο (π.χ.  $\frac{3}{4}$ ) και να αναφερθεί ότι γενικεύεται σε οποιοσδήποτε ρητούς.

Προτείνεται να γίνουν τα δύο προβλήματα της παραγράφου 7.7 και να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης 1-3 και στις ασκήσεις εμπέδωσης 3-7 της ως άνω παραγράφου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Αν τα  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα  $\chi$

ώστε να ισχύει  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\chi}$ .

[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα είναι πρόβλημα που λύνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Θαλή.]

**Στο Κεφάλαιο 7 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.**

### Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

Στόχοι είναι οι μαθητές:

- ✓ Να κατανοήσουν τη λειτουργία κριτηρίων ομοιότητας, που όπως και τα κριτήρια ισότητας, με λιγότερες προϋποθέσεις από τον ορισμό μπορούμε να αποφανθούμε για την ομοιότητα

δύο τριγώνων.

- ✓ Να συσχετίσουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και να εντοπίσουν διαφορές.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Αν υπάρχει χρόνος αρκεί να γίνει η απόδειξη ενός μόνο κριτηρίου ομοιότητας τριγώνων.
- ✓ Η εφαρμογή 4 της παραγράφου 8.2 θα χρειασθεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί τύπος (iii) της παραγράφου 10.4, για το εμβαδόν τριγώνου.
- ✓ Το Κεφάλαιο προσφέρεται για τη συζήτηση εφαρμογών που ήδη θίγονται στο σχολικό βιβλίο (μέτρηση ύψους απρόσιτων σημείων, χρήση εξάντα).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο M και ισχύει  $MA \cdot MB = MG \cdot MD$ . Να αποδείξετε, σε κάθε περίπτωση, ότι τα σημεία A, B, Γ και Δ είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.

(β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB=2, ΑΓ=4 και τη γωνία  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ABΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και  $\frac{1}{2}$ .

**Στο Κεφάλαιο 8 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.**

**Κεφάλαιο 9<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)**

**§9.1-9.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)**

Στόχοι της διδασκαλίας είναι οι μαθητές:

- ✓ Να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές.
- ✓ Να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές 9.2 ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση προβλημάτων.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Στις παραγράφους αυτές η άσκοπη ασκησιολογία αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.
- ✓ Προτείνεται να γίνει το σχόλιο της εφαρμογής ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 4, 6.

Στην παράγραφο αυτή είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι 3 κατασκευές (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων). Επίσης μπορεί να γίνει αναφορά στην 7.3 στην οποία γίνεται λόγος για την κατασκευή αρρήτων μεγεθών.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να κατασκευάσετε ορθές προβολές

α) του O, των ευθυγράμμων τμημάτων AB, ΓΔ, EZ και ΗΘ στην ευθεία ε και

β) της AB πάνω στην ΒΓ

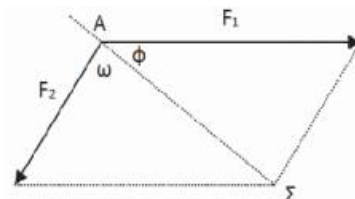
στα δύο παρακάτω σχήματα.



- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 9.4.
- Να μη γίνουν οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου  $F_1$  που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με την επιθυμητή πορεία πλεύσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά  $\phi$  μοίρες. Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου  $F_1$  μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία  $\phi$ ;



**Κεφάλαιο 10<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).**

**§10.1-10.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις & στόχοι:

- ✓ ι μαθητές να διακρίνουν τα ισοδύναμα (ισεμβαδικά) από τα ίσα σχήματα.
- ✓ Με κατάλληλους μετασχηματισμούς και χρήση βοηθητικών γραμμών οι μαθητές να υπολογίζουν εμβαδά από άλλα ήδη γνωστά τους.
- ✓ Προτείνεται, αν υπάρχει χρόνος, να γίνουν οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της εφαρμογής 2) και οι 2 δραστηριότητες.
- ✓ Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του Κεφαλαίου.
- ✓ Προτεινόμενες ασκήσεις:  
Οι ερωτήσεις κατανόησης.  
Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 6.  
Από τις αποδεικτικές ασκήσεις οι 1, 4, 7 και 8.
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1 και 5.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα φέρνοντας κατάλληλες ευθείες και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου με το εμβαδόν του αρχικού.

(β) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε

- δύο,
- τρία,
- τέσσερα ίσα παραλληλόγραμμο.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου με το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου.

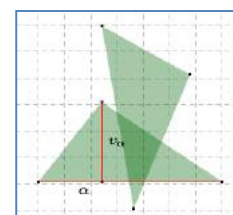
(γ) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο με ευθεία που διέρχεται από την κορυφή σε δύο τρίγωνα με

λόγο εμβαδών  $\frac{1}{3}$ .

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 1 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Τύποι υπολογισμού εμβαδών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση των τύπων των εμβαδών βασικών γεωμετρικών σχημάτων και τις αποδείξεις τους.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5771>



**§10.4 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις και στόχοι:

- Να γίνει απλή εφαρμογή των τύπων. Οι μαθητές να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματα

- υπολογισμού εμβαδών, με αυτούς.
- Αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του τύπου (iii).
  - Να εξηγηθεί ο συμβολισμός της ημιπεριμέτρου.
  - Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι:
    - Οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2.
    - Από τις ασκήσεις εμπέδωσης οι 3 και 4.
    - Από τις αποδεικτικές οι 1, 3 και 5.
  - Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 2.

#### **§10.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).**

Στόχος είναι οι μαθητές να συσχετίσουν το λόγο ομοιότητας δύο σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους.  
 Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα της παραγράφου 10.5.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

- α) Να αποδείξετε το θεώρημα διχοτόμων με χρήση εμβαδών.
- β) Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τη βοήθεια των εμβαδών και να το γενικεύσετε με την κατασκευή εξωτερικά των πλευρών του ομοίων σχημάτων (προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

### **Κεφάλαιο 11<sup>ο</sup> (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες).**

#### **§11.1-11.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις:

- Στην παράγραφο 11.1 μπορεί να γίνει μία υπενθύμιση της έννοιας του κυρτού πολυγώνου και των στοιχείων του, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.20 που είναι εκτός της ύλης της Α΄ Λυκείου.
- Προτείνεται να γίνει η παρατήρηση και το σχόλιο (που χρειάζονται για την επόμενη παράγραφο).
- Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες (βιβλίο καθηγητή για επέκταση της αποδεικτικής άσκησης 1 και συσχέτιση με τη διακόσμηση με κανονικά πολύγωνα).
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Στόχοι είναι οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα κανονικά πολύγωνα, να διακρίνουν τη γωνία τους, από την κεντρική τους γωνία και να μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων. Δεν κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιούν έτοιμους τους τύπους του θεωρήματος I της παραγράφου 11.2

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Ο ρόμβος και το ορθογώνιο είναι κανονικά πολύγωνα; Τι πρέπει να ισχύει για να είναι;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξωτερική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου» με το οποίο οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες κατασκευής κανονικών  $n$ -γώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο με στόχο να ανακαλύψουν τη σχέση που συνδέει την εξωτερική γωνία του κανονικού  $n$ -γώνου με το πλήθος  $n$  των πλευρών του. Οι μαθητές εκτελούν απλές διαδικασίες σε γλώσσα Logo που δημιουργούν μια ανοικτή τεθλασμένη γραμμή με δυο κορυφές της πάνω σε κύκλο και πειραματίζονται διορθώνοντας τις αρχικές διαδικασίες, ώστε το αποτέλεσμα της εκτέλεσής τους να είναι κανονικό  $n$ -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων συμβολικής έκφρασης μέσω του προγραμματισμού (Χελωνόκοσμος).

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5748>



#### **§11.3 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).**

Παρατηρήσεις:

- ✓ Βάσει του σχολίου και της παρατήρησης της προηγούμενης παραγράφου, οι μαθητές μπορούν μόνοι τους να οδηγηθούν στην εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε

- ✓ κύκλο, όπως προτείνεται και στο βιβλίο του καθηγητή.
- ✓ Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην εφαρμογή 1 και στη συνέχεια να γίνει η δραστηριότητα 1.
- ✓ Δεν προτείνεται να γίνουν ασκήσεις αλγεβρικού τύπου με χρήση των έτοιμων τύπων του πίνακα της παραγράφου 11.3.
- ✓ Προτείνεται οι μαθητές να κατανοήσουν πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου σε δοσμένο κύκλο, όταν αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών του (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα)
- ✓ Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$  να εγγράψετε τετράγωνο και στη συνέχεια κανονικό οκτάγωνο. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με την εγγραφή δεκαεξαγώνου κ.ο.κ. Ποιος είναι ο τύπος που περιγράφει το πλήθος των πλευρών μετά από  $n$  βήματα της κατασκευής; Τι συμβαίνει με το μήκος των πλευρών;

**§11.4, 11.5, 11.6, 11.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).**

Να αφιερωθεί χρόνος για τη διαδικασία προσέγγισης τόσο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου όσο και για τον υπολογισμό του εμβαδού του.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Οι παράγραφοι αυτές μπορούν να προετοιμάσουν τους μαθητές που θα ακολουθήσουν τη θετική κατεύθυνση για την εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο, μέσω αναφοράς στην μέθοδο της εξάντλησης. Η σύνδεση μεθόδων του Αρχιμήδη με μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν περίπου δύο χιλιετίες μετά, στην απαρχή του απειροστικού λογισμού, έχει ευρύτερο ενδιαφέρον για όλους τους μαθητές
- ✓ Θα μπορούσαν να αναφερθούν κάποια επιπλέον στοιχεία για τον αριθμό  $\pi$ , αλλά θα πρέπει να διευκρινιστεί τι είναι αλγεβρικός και τι υπερβατικός αριθμός (για την παράγραφο 11.8).
- ✓ Να μη γίνει το σύνθετο θέμα 2.
- ✓ Προτείνεται να δοθεί έμφαση στις εφαρμογές (μηνίσκοι του Ιπποκράτη) και στη δραστηριότητα.

Στόχοι είναι οι μαθητές:

- ✓ Να περιγράφουν και να ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου
- ✓ Να βρίσκουν το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας.
- ✓ Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα.
- ✓ Να χρησιμοποιούν τα παραπάνω συμπεράσματα και δεξιότητες σε προβλήματα με μεικτόγραμμα σχήματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο και το κανονικό περιγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο.

α) Να βρείτε τις περιμέτρους των δύο εξαγώνων.

β) Τι συμπεραίνετε για το μήκος του κύκλου;

γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο τρόπο προσέγγισης του μήκους του κύκλου; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας με αριθμητικά αποτελέσματα.

[Σχόλια: Αυτή η δραστηριότητα είναι εισαγωγική στην παράγραφο 11.4 και μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Επίσης μπορεί να επεκταθεί και στην προσέγγιση εμβαδού κύκλου με κατάλληλη τροποποίηση των ερωτημάτων.]

**Κεφάλαιο 12<sup>ο</sup> (Να διατεθούν 11 ώρες)**

**§12.1-12.3 (Να διατεθούν 2 ώρες)**

Να γίνει μετάβαση από τις έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας σε αυτές της Γεωμετρίας του χώρου, για παράδειγμα: Επίπεδη γωνία (σημείο, δύο ημιευθείες) και διεδρη γωνία (ευθεία, δύο ημιεπίπεδα) ή ακόμα τετράγωνο στο επίπεδο και κύβος στο χώρο. Να τονιστεί η διαφορά μεταξύ παραλλήλων και ασύμβατων ευθειών.

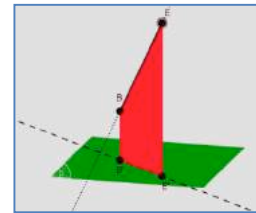
Προτείνεται:

- ✓ Να αναφερθούν με τη βοήθεια σχημάτων τα αξιώματα I, II, III και IV της παραγράφου 12.2.
- ✓ Οι προτάσεις που προκύπτουν, στην ίδια παράγραφο, να αναφερθούν επίσης, χωρίς απόδειξη ή παρουσιάζοντας ενδεικτικά την απόδειξη της πρότασης I.
- ✓ Να αναφερθούν τα αξιώματα V και VI της παραγράφου 12.3.
- ✓ Σε αυτό το σημείο μπορούν να προκύψουν μέσα από συζήτηση στην τάξη οι τυπικοί ορισμοί:  
Των παραλλήλων ευθειών (§12.2), των παραλλήλων επιπέδων, της παράλληλης ευθείας σε επίπεδο (§12.3).  
Είναι σκόπιμο οι μαθητές να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν τους ορισμούς.
- ✓ Ο ορισμός των ασύμβατων ευθειών να δοθεί μετά την απόδειξη του θεωρήματος της §12.3.
- ✓ Να δοθούν μόνο ερωτήσεις κατανόησης και ασκήσεις εμπέδωσης (και όχι αποδεικτικές), ως εργασία για το σπίτι ή την τάξη.

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Οι σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα «Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.

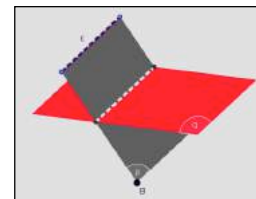
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5904>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Οι σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο προτείνεται να διερευνηθούν με το μικροπείραμα «Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5905>



### **§12.4 (Να διατεθεί 2 ώρες)**

Να αναγνωρίσουν το μεσοκάθετο επίπεδο σε ευθύγραμμο τμήμα καθώς και το μεσοπαράλληλο επίπεδο ως γεωμετρικούς τόπους, κατ' αντιστοιχία με την μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος και τη μεσοπαράλληλη δυο παραλλήλων ευθειών.

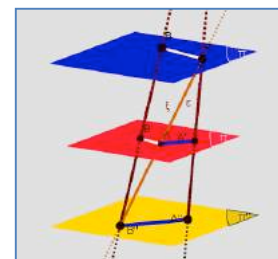
Προτείνεται:

- ✓ Να αναφερθούν τα Θεωρήματα και τα πορίσματα της παραγράφου ως αποτελέσματα.
- ✓ Μπορεί, αν υπάρχει χρόνος, να γίνει η απόδειξη του Θεωρήματος IV.
- ✓ Το θεώρημα του Θαλή να μη αποδειχθεί. Αν υπάρχει χρόνος και ανάλογα με τις διδακτικές επιλογές του διδάσκοντα, μπορεί να γίνει διερευνητικά με την προτεινόμενη ενδεικτική δραστηριότητα 1.
- ✓ Να γίνει, από το διδάσκοντα, μία επιλογή μόνο από τις ασκήσεις εμπέδωσης και, αν κριθεί σκόπιμο, η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 2).

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Το θεώρημα του Θαλή προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Το θεώρημα του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την παραλληλία και την καθετότητα ευθειών στο χώρο και την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή σε ασύμβατες ευθείες.

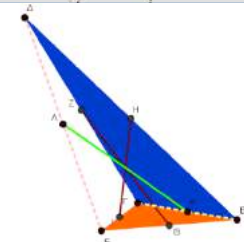
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5793>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η άσκηση 3 από τις αποδεικτικές, προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Οι διαγωνίες του στρεβλού τετραπλεύρου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για τις ιδιότητες των διαγωνίων του στρεβλού τετραπλεύρου.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5855>



### §12.5 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Σε αυτή την παράγραφο εισάγεται η νέα έννοια της γωνίας δύο ασύμβατων ευθειών, που εποπτικά σχετίζεται με την προβολή στο επίπεδο και της καθετότητας ευθείας και επιπέδου.

Οι έννοιες αυτές γενικεύουν την έννοια της γωνίας, που εδώ προσδιορίζεται από μια γωνιακή σχέση μεταξύ δύο σχημάτων του χώρου. Π.χ. οι ασύμβατες ευθείες δε σχηματίζουν 'γωνία' όπως την ξέρουν οι μαθητές, αλλά έχουν μια γωνιακή σχέση, μέσω της προβολής μιας εκ των δύο στο επίπεδο της άλλης.

Προτείνεται:

- ✓ Οι μαθητές να κάνουν εικασίες για τα εξής ερωτήματα:  
Πώς μπορούμε να ορίσουμε μια γωνία μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών;  
Πότε θα χαρακτηρίζαμε μία ευθεία και ένα επίπεδο κάθετα μεταξύ τους;
- ✓ Στη συνέχεια να κατασκευαστούν οι ορισμοί στην τάξη και να συγκριθούν με τους τυπικούς ορισμούς του βιβλίου.
- ✓ Να αποδειχθεί το κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο και το θεώρημα των τριών καθέτων.
- ✓ Να γίνει επιλογή από τις ερωτήσεις κατανόησης και τις ασκήσεις εμπέδωσης.

### §12.6 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Στην παράγραφο 12.6 προτείνεται να δοθούν οι ορισμοί και να γίνουν οι εφαρμογές ως δραστηριότητες στην τάξη. Επίσης προτείνεται να γίνει περιορισμένος αριθμός από τις ασκήσεις εμπέδωσης, ανάλογος με την εκτίμηση και τον διδακτικό προγραμματισμό του διδάσκοντα.

Επίσης προτείνονται οι παρακάτω δραστηριότητες:

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από:

- α) Δύο σημεία,
- β) τρία σημεία.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  σε ένα επίπεδο Π. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας  $\hat{xOy}$ .

**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online), προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

- Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξαναοίξτε τον).

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- Β΄ Τάξη Εσπερινού ΓΕΛ
- Γ΄ Τάξης Εσπερινού ΓΕΛ

Η Διδακτέα –εξεταστέα ύλη ταυτίζεται με αυτή της Β΄ Τάξης του Ημερήσιου ΓΕΛ .

Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Β΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

Από το βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία Β΄ΓΕΛ Τεύχος Β » των. Αργυρόπουλου Η, Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάκη Σ. και Σιδέρη Π.

**Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

**Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

**Κεφάλαιο 9<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

**Κεφάλαιο 10<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

**Κεφάλαιο 11<sup>ο</sup>**

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

**Κεφάλαιο 12<sup>ο</sup>**

(Να διατεθούν 6 ώρες)

**Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στο διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίδεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου, ( εννοιών και μεθόδων ) της κάθε παραγράφου**

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

- Β΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ
- Β΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΛ
- Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΛ

#### I. Διδακτέα ύλη

Από το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου» των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

#### **Κεφ. 1<sup>ο</sup>: Διανύσματα**

- 1.1. Η Έννοια του Διανύσματος .
- 1.2. Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων.
- 1.3. Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα (χωρίς τις Εφαρμογές 1 και 2).
- 1.4. Συντεταγμένες στο Επίπεδο (Χωρίς την απόδειξη της υποπαραγράφου «Συντεταγμένες Διανύσματος», χωρίς την Εφαρμογή 2 στη σελ. 35 και χωρίς την απόδειξη της συνθήκης παραλληλίας διανυσμάτων).
- 1.5. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων (χωρίς την απόδειξη του τύπου της αναλυτικής έκφρασης Εσωτερικού Γινομένου) και χωρίς την παράγραφο «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα».

#### **Κεφ. 2<sup>ο</sup>: Η Ευθεία στο Επίπεδο**

- 2.1. Εξίσωση Ευθείας.
- 2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας (χωρίς την εφαρμογή 2).
- 2.3. Εμβαδόν Τριγώνου (χωρίς τις αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία, του εμβαδού τριγώνου και χωρίς την Εφαρμογή 1).

#### **Κεφ. 3<sup>ο</sup>: Κωνικές Τομές**

- 3.1. Ο Κύκλος (χωρίς τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου).
- 3.2. Η Παραβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης και την Εφαρμογή 1 στη σελ. 96).
- 3.3. Η Έλλειψη (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, την εφαπτομένη της έλλειψης και χωρίς τις εφαρμογές).
- 3.4. Η Υπερβολή (χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της υπερβολής, την απόδειξη του τύπου των ασύμπτωτων και την εφαπτομένη της υπερβολής).
- 3.5. Μόνο η υποπαραγράφος «σχετική θέση ευθείας και κωνικής».

#### **ΣΗΜΕΙΩΣΗ**

**A)** Δεν θα διδαχθούν οι ασκήσεις Β ομάδας των παραγράφων 3.2, 3.3 και 3.4.

**B)** Από τις γενικές ασκήσεις του 3<sup>ου</sup> Κεφαλαίου δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στις παραπάνω παραγράφους (Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή).

**Γ)** Όσον αφορά στις προτεινόμενες δραστηριότητες, επαφίεται στην κρίση του διδάσκοντα η επιλογή εκείνων που θα εφαρμοστεί στην τάξη. Ωστόσο, καλό είναι να εμπλουτιστεί το μάθημα με το συγκεκριμένο υλικό.

#### **II. Διαχείριση διδακτέας ύλης**

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στις παρούσες οδηγίες ως επιπλέον διδακτικό υλικό προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το λύκειο και τον οδηγό για τον εκπαιδευτικό που εκπονήθηκαν στο πλαίσιο της πράξης "Νέο Σχολείο" και μπορούν να ανακτηθούν από τον

**Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>**  
**(Προτείνεται να διατεθούν 16 διδακτικές ώρες).**

**Εισαγωγή**

Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα εμβαθύνουν στον λογισμό των διανυσμάτων. Ποιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά:

Στον ορισμό του διανύσματος, τα χαρακτηριστικά του και στη σχέση μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ίσα, αντίθετα, γωνία διανυσμάτων).

Στον ορισμό των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα (βαθμωτός πολλαπλασιασμός).

Στο γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων.

Στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Στην παράσταση διανύσματος σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Τα παραπάνω αποτελούν απαραίτητες γνώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που ακολουθεί, καθώς και η αντιμετώπιση πολλών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

**Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των διανυσμάτων**

Το διάνυσμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δομήθηκε από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής.

Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων.

Προτάσεις και θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται με χρήση των διανυσμάτων.

**§ 1.1 , 1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 και 2 ώρες αντίστοιχα**

Το διάνυσμα εισάγεται ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{AB}$  μπορεί να γραφτεί ως διαφορά  $\vec{OB} - \vec{OA}$ , όπου  $O$  είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

**§ 1.3 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες**

**A)** Να τονιστεί ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \left( \vec{\beta} \neq \vec{0} \right)$  χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων.

**B)** Επειδή αρκετοί μαθητές αντιλαμβάνονται τον τύπο  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$  ως διαίρεση διανύσματος

με αριθμό, καλό είναι να τονισθεί ότι η γραφή αυτή είναι μία σύμβαση και στην πραγματικότητα το 2<sup>ο</sup> μέλος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$ , δηλαδή

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}.$$

**Γ)** Να γίνουν ασκήσεις μόνο από την Α' ομάδα.

**§ 1.4 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες**

**A)** Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Να τονισθεί επίσης η μοναδικότητα της έκφρασης διανύσματος με τις συντεταγμένες του. Η έννοια των διανυσμάτων είναι σημαντική στη γεωμετρία εάν αναλογιστεί κανείς ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.

**B)** Πριν αναφερθεί η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων, ο εκπαιδευτικός να δώσει τον ορισμό της ορίζουσας δύο διανυσμάτων, ο οποίος βρίσκεται προς το τέλος της παραγράφου.

Ενδεικτικά:

Ονομάζουμε οριζούσα δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  και τη συμβολίζουμε με  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$  τον πραγματικό αριθμό  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$ , όπου η 1<sup>η</sup> γραμμή είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και η 2<sup>η</sup> γραμμή είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ .

Την οριζούσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  με τη σειρά που δίνονται, τη συμβολίζουμε και με  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ . Δηλαδή  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$ .

Γενικότερα, η παράσταση  $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$  ονομάζεται οριζούσα και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

### §1.5 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

**A)** Να μην διδαχθεί η υποπαράγραφος «Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα»

**B)** Να μη γίνουν:

- Οι ασκήσεις 8, 9 και 10 και 12 της Α' Ομάδας.
- Οι ασκήσεις 1, 3, 9 και 10, 11 της Β' Ομάδας.
- Οι Γενικές Ασκήσεις.

### Σχόλιο

Προτείνεται να γίνουν ως δραστηριότητες κάποιες από τις ερωτήσεις κατανόησης όπως για παράδειγμα, οι ερωτήσεις 6, 7 και 13. Ιδιαίτερα, η 13 θα αντιμετωπιστεί με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, αφού η προβολή πλέον δεν διδάσκεται, με στόχο την κατανόηση του ρόλου της γωνίας και ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο.

### Προτεινόμενες Δραστηριότητες

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας. Η πρώτη δραστηριότητα συνδέει τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συνδέει, διατυπώνει και αποδεικνύει προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το διανυσματικό λογισμό, αλλά να ακολουθεί και την αντίστροφη πορεία. Τέλος, η τρίτη δραστηριότητα<sup>1</sup> αναφέρεται σε ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, όπου οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα με χρήση των διανυσμάτων και απαντούν στο τέλος με τη φυσική γλώσσα. Αν και είναι αυτονόητο, επισημαίνεται ότι αν ένα πρόβλημα απαιτεί τύπους ή σχέσεις από άλλο επιστημονικό πεδίο, αυτά δίνονται στους μαθητές.

### Δραστηριότητα 1

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο  $F_p = 20\text{N}$  και σχηματίζει γωνία  $\theta^\circ$  με το οριζόντιο έδαφος. Το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.

α) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης όταν η γωνία είναι  $30^\circ$ .

β) Επιλέξτε δύο άλλες τιμές για τη γωνία  $\theta^\circ$  και υπολογίστε το έργο σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία;



<sup>1</sup> Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει αλιευθεί από το βιβλίο: THOMAS Απειροστικός λογισμός, Τόμος II των Finney, Weir & Giordano, σελ. 697, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2011.

### ΣΧΟΛΙΟ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στοχεύει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη φυσική και εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Εστιάζει στο γεγονός ότι το έργο δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Της δύναμης και της μετατόπισης.

### Δραστηριότητα 2

Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$ .

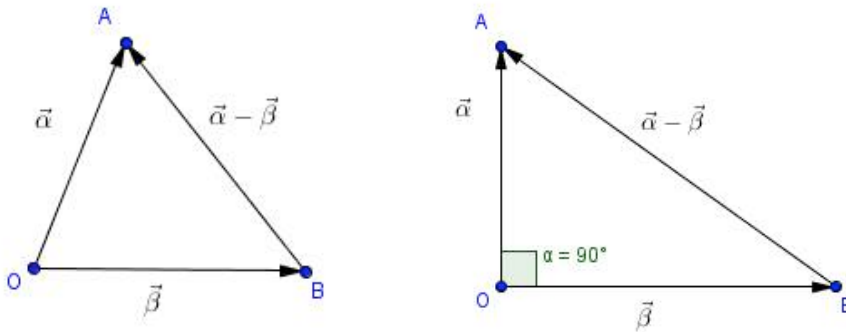
Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  του επιπέδου ή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμά σας.

#### Ενδεικτική λύση

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα συνδέει το διανυσματικό λογισμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο πρώτο ερώτημα αναμένεται, οι μαθητές να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και εργαζόμενοι, κυρίως αλγεβρικά, να καταλήξουν ότι η συγκεκριμένη σχέση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα.

Με το δεύτερο ερώτημα επιχειρούμε να οπτικοποιήσουν οι μαθητές τη δοθείσα σχέση. Έτσι, με σημείο αναφοράς το O θα κατασκευάζουν τα διανύσματα  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ , οπότε θα είναι  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{OA} - \vec{OB}|^2 = |\vec{BA}|^2$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Οι μαθητές, στη συνέχεια, αναμένεται να ερμηνεύσουν τα μέτρα των διανυσμάτων ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε τη σχέση  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$  θα την γράψουν στη μορφή:

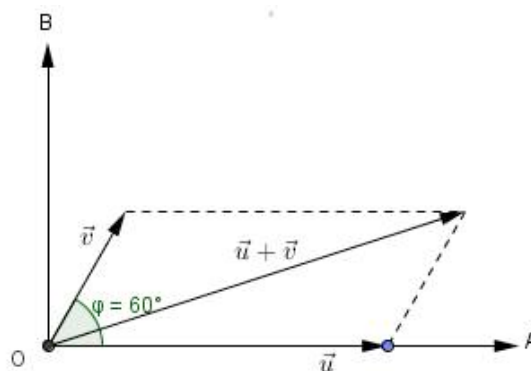
$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$ , για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ισχύει, αν και μόνο αν το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα.

### Δραστηριότητα 3

Ένα αεροσκάφος που πετά προς ανατολάς με ταχύτητα 500 km/h απουσία ανέμου, συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h, που πνέει σε κατεύθυνση  $60^\circ$  ανατολική-βορειοανατολική (οι κατευθύνσεις ορίζουν γωνία η οποία μετριέται από την πρώτη κατεύθυνση δηλ. την ανατολική, προς τη δεύτερη κατεύθυνση, δηλ τη βορειοανατολική). Το αεροπλάνο διατηρεί τον προσανατολισμό του προς ανατολάς, ωστόσο λόγω του ανέμου, η ταχύτητα του ως προς το έδαφος αποκτά νέο μέτρο και κατεύθυνση. Βρείτε τη νέα κατεύθυνση του αεροσκάφους.

#### Ενδεικτική λύση

Έστω  $\vec{u}$  η ταχύτητα του αεροσκάφους πριν την επίδραση του ανέμου και  $\vec{v}$  η ταχύτητα του ανέμου. Τότε έχουμε:  $|\vec{u}| = 500$  και  $|\vec{v}| = 70$ . Ζητείται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης  $\vec{u} + \vec{v}$ . Υποθέτουμε ότι ο θετικός ημιάξονας των  $x$  δείχνει προς την Ανατολή και ο θετικός ημιάξονας των  $y$  προς τον Βορρά. Στο σύστημα αυτό το διάνυσμα  $\vec{u} = (500, 0)$  και το



$$\vec{v} = (70\sigma\upsilon\nu 60^\circ, 70\eta\mu 60^\circ) = (35, 35\sqrt{3}). \text{ Επομένως, } \vec{u} + \vec{v} = (535, 35\sqrt{3}) \text{ και συνεπώς}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{535^2 + (35\sqrt{3})^2} \approx 538,4.$$

Επιπλέον, για τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η κατεύθυνση του αεροσκάφους με την ανατολική κατεύθυνση ισχύει:  $\epsilon\varphi\theta = \frac{35\sqrt{3}}{535}$ .

**Ερμηνεία:** Η νέα ταχύτητα του αεροσκάφους θα είναι περίπου 538,4 km/h, ενώ η νέα πορεία του είναι περίπου  $6,5^\circ$  ανατολική-βορειοανατολική.

#### Β' τρόπος

Μπορούμε να υπολογίσουμε το  $|\vec{u} + \vec{v}|$  με χρήση του εσωτερικού τετραγώνου και τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{u} + \vec{v}$  με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

### Εισαγωγή

Κατά τη φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στην Β' Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης (κλίσης) μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης της ευθείας, η γενική της μορφή, καθώς και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο. Με τη διδασκαλία αυτής της ενότητας επιδιώκεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών.

Προτείνεται, η διδασκαλία της ευθείας να έχει ως στόχο, να μπορούν οι μαθητές να απαντούν στις παρακάτω ερωτήσεις:

Με ποιον τρόπο συνδέεται η κλίση της ευθείας, ο λόγος μεταβολής μεταξύ δύο σημείων της και ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος παράλληλου προς αυτήν;

Πώς ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες με χρήση των συντελεστών διεύθυνσης;

Πώς ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες όταν μία τουλάχιστον εκ των δύο δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης.

Πώς βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν: α) διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης ή είναι παράλληλη στον  $x'x$ , β) δίνονται δύο σημεία της, γ) δίνεται ένα σημείο της και είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα;

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία και ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά;

Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ένα σημείο ανήκει στην ευθεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας και με ποιο τρόπο προσδιορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο και ένα διάνυσμα παράλληλο με βάση τη γενική μορφή της εξίσωσης;  
 Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο και πώς διερευνάται αλγεβρικά το συγκεκριμένο ερώτημα με χρήση των οριζουσών;

**§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες.**

Προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να εκφρασθεί ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας και στο ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ . Να τονισθεί επίσης, ότι από το σημείο  $M(x_0, y_0)$  διέρχονται οι ευθείες με εξισώσεις:  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$  και  $x = x_0$ .

**§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες**

Να δοθεί έμφαση όχι μόνο στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας, αλλά και στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης και των συντεταγμένων του διανύσματος που είναι παράλληλο ή κάθετο προς την ευθεία. Στην παράγραφο αυτή εισάγεται η διαδικασία επίλυσης του γραμμικού συστήματος  $2 \times 2$  με τη μέθοδο των οριζουσών, σε συνδυασμό με τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο. Επειδή δεν περιέχεται το σχετικό θέμα στο σχολικό βιβλίο, προτείνεται η παρακάτω διδακτική πορεία.

Ας είναι

$$\begin{cases} A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot y_1 + \Gamma_1 = 0 & \text{με } A_1 \neq 0 \text{ ή } B_1 \neq 0 \\ A_2 \cdot x_1 + B_2 \cdot y_1 + \Gamma_2 = 0 & \text{με } A_2 \neq 0 \text{ ή } B_2 \neq 0 \end{cases}$$

οι εξισώσεις δύο ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στο επίπεδο αντίστοιχα.

Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot y_1 = -\Gamma_1 & \text{με } A_1 \neq 0 \text{ ή } B_1 \neq 0 \\ A_2 \cdot x_1 + B_2 \cdot y_1 = -\Gamma_2 & \text{με } A_2 \neq 0 \text{ ή } B_2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Τότε λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή αλλιώς ένα γραμμικό σύστημα ( $2 \times 2$ ).

Τα διανύσματα  $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1)$  και  $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2)$  είναι κάθετα στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα. Επομένως, θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

Η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\eta}_1$  και  $\vec{\eta}_2$ , η  $\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ , επειδή σχηματίζεται από

τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος (1), ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και συμβολίζεται με  $D$ , δηλαδή  $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα  $\vec{\eta}_1 = (A_1, B_1)$  και  $\vec{\eta}_2 = (A_2, B_2)$  δεν είναι συγγραμμικά, τότε ισοδύναμα

$$\det(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0 \quad (2)$$

Επομένως, οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Αν  $D = 0$ , τότε ισοδύναμα τα  $\vec{\eta}_1$  και  $\vec{\eta}_2$  είναι συγγραμμικά και επομένως, οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν  $D = 0$ , τότε το σύστημα (1) είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα.

### Εναλλακτική προσέγγιση

Αντί των καθέτων διανυσμάτων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα  $\overset{i}{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$  και  $\overset{i}{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$  που είναι παράλληλα στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα. Τότε τα διανύσματα θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα  $\overset{i}{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$  και  $\overset{i}{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$  δεν είναι συγγραμμικά, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \overset{r}{\delta}_1 & \overset{r}{\delta}_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} B_1 & -A_1 \\ B_2 & -A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -B_1 A_2 + A_1 B_2 \neq 0$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και  $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$  (2). Η συγκεκριμένη ορίζουσα που αποτελείται

από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, λέγεται ορίζουσα του συστήματος. Η σχέση (2) σημαίνει ισοδύναμα ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \overset{r}{\delta}_1 & \overset{r}{\delta}_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta_1 & -\alpha_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

Αφού τα διανύσματα  $\overset{i}{\delta}_1 = (\beta_1, -\alpha_1)$  και  $\overset{i}{\delta}_2 = (\beta_2, -\alpha_2)$  είναι παράλληλα, τότε και οι αντίστοιχες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν  $D = 0$ , τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις.

### Σχόλιο

Προαιρετικά ο διδάσκων θα μπορούσε, με τη βοήθεια των οριζουσών, να προχωρήσει στη διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή συμπίπτουν.

Για παράδειγμα: Οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνουν έναν τουλάχιστον από τους άξονες. Έστω ότι

τέμνουν τον  $y'y$ . Τότε, η  $\varepsilon_1$  τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη  $-\frac{\Gamma_1}{B_1}$  και η  $\varepsilon_2$  στο σημείο με

τεταγμένη  $-\frac{\Gamma_2}{B_2}$ . Στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  :

Συμπίπτουν αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1} = \frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 = B_1 \Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 - B_1 \Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_x = 0$$

όπου  $D_x = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix}$ . Η ορίζουσα  $D_x$  προκύπτει από την ορίζουσα  $D$ , αν η στήλη των συντελεστών

του  $x$  αντικατασταθεί από τους σταθερούς όρους του συστήματος (1). Με παρόμοιο τρόπο

προκύπτει και η ορίζουσα  $D_y = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$ , για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι  $D_y = 0$ . Να

σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει συντελεστής αγνώστου διαφορετικός από το μηδέν.

Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{B_1} \neq \frac{\Gamma_2}{B_2} \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 \neq B_1 \Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1 B_2 - B_1 \Gamma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D_x \neq 0$$

Συμπερασματικά

ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ	ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται (μοναδικό κοινό σημείο)	Μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
$D = 0$	Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή Οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρα κοινά σημεία)	Αδύνατο ή Άπειρες λύσεις

Να τονιστεί με απλά αριθμητικά παραδείγματα ότι στην περίπτωση όπου οι συντελεστές  $A_1, B_2, A_2, B_1$  δεν είναι μηδέν η συνθήκη  $D = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$  δηλώνει ότι οι συντελεστές είναι ανάλογοι και οι ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ενώ οι ορίζουσες  $D_x, D_y$

καθορίζουν αν η αναλογία ισχύει και για τους συντελεστές  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , οπότε οι ευθείες ταυτίζονται, ή δεν ισχύει οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Προτείνεται να διδαχθούν ασκήσεις παραμετρικών συστημάτων από το βιβλίο της Άλγεβρας Β Λυκείου υπό το πρίσμα της σχετικής θέσης δύο ευθειών.

Η διδακτική πορεία που θα επιλεγεί δεν θα είναι στην εξεταστέα ύλη. Οι μαθητές όμως πρέπει να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν σε ασκήσεις τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα.

### §2.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, οι μαθητές να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:

1<sup>η</sup>: Δίνονται η ευθεία και το σημείο  $A(5, 2)$ . Να βρεθούν:

- Η εξίσωση της ευθείας  $\zeta$  που διέρχεται από το  $A$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon$ .
- Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της  $\zeta$  με την  $\varepsilon$ .
- Η απόσταση του  $A$  από την  $\varepsilon$ .

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.

2<sup>η</sup>: Δίνονται τα σημεία  $A(5, 2)$ ,  $B(2, 3)$  και  $\Gamma(3, 4)$ . Να βρεθούν:

- Η εξίσωση της ευθείας  $B\Gamma$ .
- Το ύψος  $AD$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και
- Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Στη συνέχεια, να δηλωθεί στους μαθητές ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.

Β) Να μη γίνουν:

- Η άσκηση 7 της Β' Ομάδας.
- Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7.

### Προτεινόμενες Δραστηριότητες σε όλο το κεφάλαιο

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας

#### Δραστηριότητα 1

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα

		Κλίση ευθείας	Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$	$\omega = 30^\circ$			
	$\omega = 60^\circ$			
	$\omega = 150^\circ$			
Διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία	$\vec{\delta} = (3, \sqrt{3})$			
	$\vec{\delta} = (-1, -\sqrt{3})$			
	$\vec{\delta} = (-3, \sqrt{3})$			
Σημεία της ευθείας	$(0, 1)$ και $(\sqrt{3}, 2)$			
	$(1, \sqrt{3} - 1)$ και $(\sqrt{3}, 2)$			
	$(0, 2)$ και $(-\sqrt{3}, 3)$			

Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και να συνδέσουν έτσι την κλίση της ευθείας, το συντελεστή διεύθυνσης του παράλληλου διανύσματος και το πηλίκο διαφορών  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των τριών μεγεθών ταυτίζονται και κατά συνέπεια εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια.

### Δραστηριότητα 2

Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$(1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8 \quad (\varepsilon_1)$$

$$x + \sqrt{3}y = 1 \quad (\varepsilon_2)$$

α) Να προσδιορίσετε δύο διανύσματα  $\vec{u}_1$  και  $\vec{u}_2$  που να είναι κάθετα στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα και να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες μεταξύ τους.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

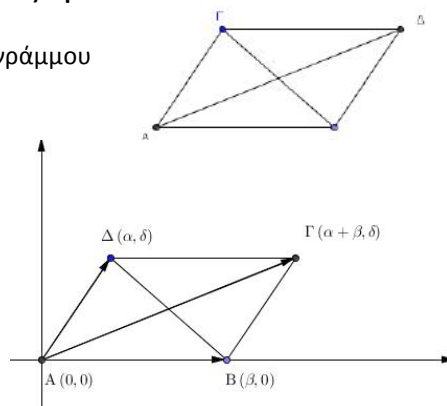
### Δραστηριότητα 3 (Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με άλγεβρα)

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

#### Ενδεικτική λύση

Το ζητούμενο αποτελεί μία από τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Αυτό που θέλουμε όμως τώρα, είναι να την αποδείξουμε με χρήση της άλγεβρας. Επιλέγουμε λοιπόν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Η καταλληλότητα έχει να κάνει με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων αγνώστων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το διπλανό σχήμα με τους άξονες. Θεωρώντας το σημείο  $A(0,0)$  ως αρχή των αξόνων, το σημείο  $B(\beta,0)$  και το σημείο  $\Delta(\alpha,\delta)$ . Τότε  $\vec{AG} = (\alpha + \beta, \delta)$ ,

οπότε το σημείο  $\Gamma$  έχει τις ίδιες συντεταγμένες. Άμεσα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος  $AG$  είναι  $(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\delta}{2})$  όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του μέσου του



ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

#### Δραστηριότητα 4

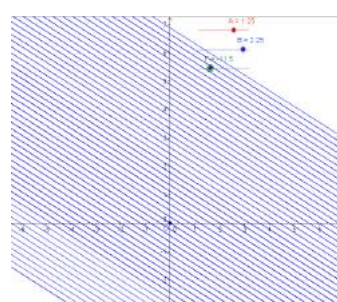
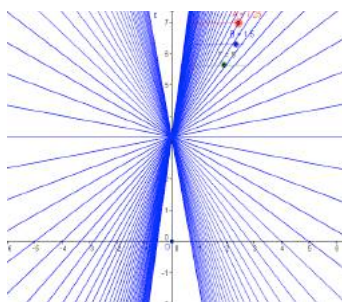
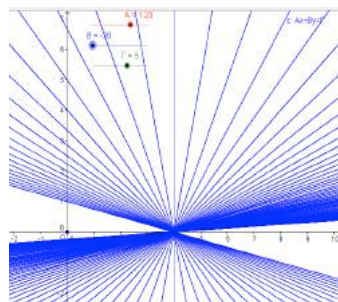
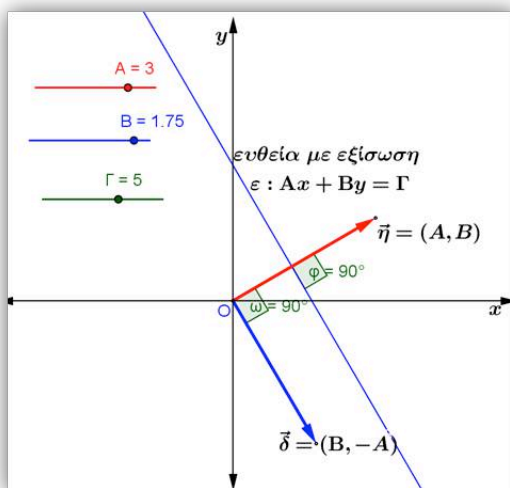
Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra να επιλέξετε τρεις δρομείς A, B, Γ και να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα  $\vec{n} = (A, B)$  και  $\vec{\delta} = (B, -A)$ , καθώς και την ευθεία ε με εξίσωση

$Ax + By = \Gamma$ . Να υπολογίσετε επιπλέον το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{n}$  και  $\vec{\delta}$ , καθώς και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{n}$  με την ευθεία ε και, στη συνέχεια, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων  $\vec{n}$  και  $\vec{\delta}$ , τόσο μεταξύ τους, όσο και με την ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε το A ή το B;

Πώς κινείται η ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε μόνο το A ή μόνο το B ή μόνο το Γ; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό ενεργοποιήστε το ίχνος της ευθείας ε και μεταβάλλετε διαδοχικά τους δρομείς A, B, Γ, αφού προηγουμένως διατηρήσετε στην επιφάνεια εργασίας μόνο την ευθεία και τους δρομείς και αποκρύψετε όλα τα υπόλοιπα (βλέπε παρακάτω σχήμα).

Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό σας.



#### Δραστηριότητα 5

Δίνεται η παρακάτω οικογένεια γραμμικών εξισώσεων:

$$\varepsilon_\lambda: (\lambda^2 - \lambda) \cdot x - \lambda \cdot y = \lambda^2 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Με το λογισμικό GEOGEBRA επιλέξτε ένα δρομέα λ που να παίρνει τιμές από -20 έως 20 με αύξηση 0,2 και παραστήστε γραφικά την  $\varepsilon_\lambda$

Μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και απαντήστε στο ερώτημα: «Τι παριστάνει η  $\varepsilon_\lambda$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \neq 0$  και τί για  $\lambda = 0$ ;» Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Πάρτε δύο τιμές του λ, για παράδειγμα  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$ , παραστήστε γραφικά τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους A και επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

Ενεργοποιήστε το ίχνος της  $\varepsilon_\lambda$ , μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του  $\lambda$  και ελέγξτε αν οι  $\varepsilon_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  διέρχονται όλες από το σημείο Α. Επαληθεύσατε την εικασία σας αλγεβρικά.

### Κεφάλαιο 3°

(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

(Ενδεικτική κατανομή ωρών: §3.1-10 ώρες, §3.2-4 ώρες, §3.3-2 ώρες, §3.4-2 ώρες, §3.5-2 ώρες)

#### Εισαγωγή

Η μελέτη των κωνικών τομών αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη της ευθείας, που εκφράζεται με εξίσωση πρώτου βαθμού, αφού η αναλυτική τους έκφραση αντιστοιχεί σε εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου προτείνεται, να δοθεί έμφαση στα παρακάτω σημεία:

Κάθε κωνική τομή είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένη κάθε φορά ιδιότητα.

Ο τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής.

Οι ιδιότητες των κωνικών τομών έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Στόχος είναι να μπορούν οι μαθητές να απαντούν στις παρακάτω ερωτήσεις:

Γιατί ονομάστηκαν κωνικές τομές ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;

Πώς ορίζεται ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;

Ποιες είναι οι εξισώσεις των κωνικών τομών;

Πώς ορίζεται η εφαπτομένη σε ένα σημείο μιας κωνικής τομής και ποια είναι η εξίσωσή της; (μόνο για τον κύκλο και την παραβολή).

Πώς ορίζονται οι ασύμπτωτες της υπερβολής;

#### §3.1 Προτείνεται να διατεθούν 10 ώρες

Να γίνει υπενθύμιση των βασικών ιδιοτήτων του κύκλου που έχουν γνωρίσει οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προτείνεται για την εύρεση της εξίσωσης του κύκλου να μην δοθεί έμφαση μόνο στην εφαρμογή του τύπου, αλλά και στην εύρεσή της με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου.

#### §3.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα της παραβολής με εστία το σημείο  $E(1, 0)$  και διευθετούσα την ευθεία  $\delta: x = -1$ .

Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.

#### §3.3 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

**A)** Πριν δοθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα  $2a$ . Για παράδειγμα της έλλειψης με εστίες τα σημεία  $E'(-4, 0)$ ,  $E(4, 0)$  και  $2a = 10$ . Δεν θα γίνουν οι ασκήσεις 5,6 και 7 της Α' ομάδας που αναφέρονται στην εφαπτομένη της έλλειψης.

**B)** Να μη δοθεί έμφαση σε ασκήσεις που αναλώνονται σε πολλές πράξεις

#### §3.4 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από την παράγραφο αυτή να γίνουν απλές ασκήσεις με αριθμητικά δεδομένα και μόνο. Δεν θα γίνουν οι ασκήσεις 4, 5 και 7 της Α ομάδας που αναφέρονται στην εφαπτομένη της υπερβολής.

#### §3.5 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής» και για κωνικές της μορφής των παραγράφων 3.1 και 3.2. Έτσι, οι μαθητές θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής. Προτείνεται η επίλυση απλών ασκήσεων, όπως είναι η

άσκηση 4 της Α΄ ομάδας.

### Δραστηριότητα

α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί με το αντίστοιχό του στη δεύτερη στήλη:

Εξίσωση	Κωνική τομή
$9x^2 - y^2 = 0$	Έλλειψη
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$	Υπερβολή
$y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	Παραβολή
$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$	Ζεύγος ευθειών
$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$	Κύκλος

β. Όμοια για τον πίνακα:

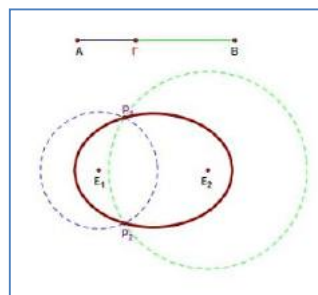
Εκκεντρότητα	Κωνική τομή
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\frac{4}{5}$	Υπερβολή
$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

### Ενδεικτικές ψηφιακές δραστηριότητες

#### Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τομές κώνου με επίπεδο. Μικροπείραμα, αναρτημένο στο «Φωτόδεντρο», για τη διερεύνηση των τομών ενός κώνου ένα επίπεδο. Ο χρήστης μπορεί να διερευνήσει το είδος της καμπύλης που προκύπτει (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή, κύκλος), σε σχέση με τη θέση και την κλίση του επιπέδου τομής, καθώς και τη γωνία της κορυφής του κώνου.

<http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5654?locale=el>



#### Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η έννοια της έλλειψης προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη δραστηριότητα «Κατασκευή έλλειψης» από το Φωτόδεντρο. Με τη βοήθεια των οδηγιών και του λογισμικού, οι μαθητές κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που το άθροισμα των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερό. Μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά τη θέση των σταθερών σημείων, το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τρίτου σημείου από αυτά και να παρατηρούν κάθε φορά τη μεταβολή στο γεωμετρικό τόπο.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/6873>

**Σημείωση:** Μπορείτε να κατεβάσετε τις ψηφιακές δραστηριότητες και να τις ανοίξετε τοπικά με το αντίστοιχο λογισμικό. Αν δεν έχετε εγκατεστημένο το λογισμικό, τότε αν πρόκειται για αρχείο με κατάληξη .ggb κατεβάστε και εγκαταστήστε το Geogebra από τη διεύθυνση <https://www.geogebra.org/download> ή διαφορετικά ψάξτε για το αντίστοιχο λογισμικό στη διεύθυνση <http://photodentro.edu.gr/edusoft/>.

Για να δείτε την προεπισκόπηση των ψηφιακών δραστηριοτήτων σε απευθείας σύνδεση (online),

προτιμήστε τον φυλλομετρητή Mozilla Firefox.

Αν η εφαρμογή είναι σε flash θα πρέπει να εγκαταστήσετε το πρόσθετο Adobe flash player από τη διεύθυνση <https://get.adobe.com/flashplayer/>.

Αν η εφαρμογή χρησιμοποιεί τη Java (π.χ. Geogebra), τότε εγκαταστήστε την από τη διεύθυνση <http://java.com/en/>. Αν συνεχίζετε να έχετε πρόβλημα στην προεπισκόπηση, τότε προσθέστε τις διευθύνσεις <http://photodentro.edu.gr> και <http://digitalschool.minedu.gov.gr> στο exception site list στην καρτέλα security της Java (ανοίξτε το Control Panel, τη Java, στην καρτέλα security πατήστε Edit site list και προσθέστε τις δύο διευθύνσεις, κλείστε το browser και ξαναοίξτε τον).

**Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.**

**Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ  
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ**

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ**

**Εσωτ. Διανομή**

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Γενικού Γραμματέα
- Δ/νση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Αυτ. Δ/νση Παιδείας, Ομογ., Διαπολ. Εκπ/σης, Ξένων και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Δ/νση Ιδιωτικής Εκπ/σης
- Αυτοτελές Τμήμα Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων