ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ
ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ, ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/νση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Α. Πασχαλίδου
Β. Πελώνη
Τηλέφωνο: 210-3443422
210-3442238

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 16-09-2019
Αρ. Πρωτ. 143431/Δ2

ΠΡΟΣ:

- **Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης**
- **Συντονιστές Εκπ/κού Έργου Δ.Ε. (μέσω των Περιφερειακών Δ/νσεων Εκπ/σης)**
- **Διευθύνσεις Δ/θμιας Εκπ/σης**
- **Γενικά Λύκεια (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)**

ΚΟΙΝ.: **Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής**
info@iep.edu.gr

ΘΕΜΑ: Διαχείριση διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και Γ΄ και Δ΄ τάξεων Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019-2020

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ. 135019/03-09-2019 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 34/29-08-2019 του Δ.Σ) σάς αποστέλλουμε τη **διαχείριση διδακτέας-εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και Γ΄ και Δ΄ τάξεων Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019-2020.**

Για το σχολικό έτος 2019-2020 η διδακτέα-εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης περιλαμβάνει την θεματική της Ανάλυσης της οποίας η κυρίως διδασκαλία καταλαμβάνει 6 ώρες την εβδομάδα, ενώ διατίθεται επιπλέον μία ώρα την εβδομάδα για επίλυση αποριών. Οι παρούσες οδηγίες αφορούν στην κυρίως διδασκαλία.

Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την ευχερέστερη υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα:
α) την σύνδεση της ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα.

β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από τη μέχρι τώρα μαθησιακή πορεία τους.

Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια επιπλέον νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/τριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο http://ebooks.edu.gr). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους μαθητές/τριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Η αντιμετώπιση γνωστικών ελλείψεων ορισμένων μαθητών/τριών μπορεί να γίνεται με την ανάδειξη ενδομαθηματικών συνδέσεων εννοιών και διαδικασιών καθώς και την ανάκληση προηγούμενων γνώσεων. Αυτά αποτελούν σημαντικές ευκαιρίες αφενός επανασύνδεσης μαθητών που κινδυνεύουν να χάσουν την επαφή με τα μαθηματικά και αφετέρου βαθύτερης κατανόησης για όλους. Τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται κατά την κρίση του διδάσκοντα, είτε ως θεωρητική συζήτηση (στις αρχικές παραγράφους συναρτήσεων, μονοτονίας, ακροτάτων κ.α.), είτε ως παρεμβολή των αναγκαίων θεωρητικών στοιχείων για μια άσκηση.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται ο προτεινόμενος ελάχιστος αριθμός ωρών διδασκαλίας ανά παράγραφο του σχολικού βιβλίου.

Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών
1.1	1	2.1	8	3.1	4
1.2	6	2.2	4	3.4	5
1.3	8	2.3	5	3.5	7
1.4	3	2.4	5	3.7	8
1.5	6	2.5	4		
1.6	4	2.6	7		
1.7	4	2.7	10		
1.8	12	2.8	4		
		2.9	4		
		2.10	5		

Κεφάλαιο 1ο

§1.1

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι’ αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ’ υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει “αφορμές” στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

§1.2

Να δοθεί έμφαση σε προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης με κατασκευή συνάρτησης που περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία κατάσταση, όπως για παράδειγμα οι ασκήσεις 5 της Α ομάδας και 2, 3 και 4 της Β ομάδας.

Η διδασκαλία της παραγράφου αυτής είναι μία ευκαιρία ανάκλησης/συμπλήρωσης προηγούμενων γνώσεων από οικείες συναρτήσεις (τριγωνομετρικές πολυωνυμικές, εκθετικές, λογαριθμικές, κ.α.) και των αντίστοιχων εξισώσεων και ανισώσεων. Επιπλέον, γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις είναι χρήσιμο να συζητούνται με αφορμή σχετικά προβλήματα. Ανάλογες παρεμβάσεις είναι χρήσιμο να γίνονται και σε επόμενες παραγράφους σύμφωνα με την κρίση του διδάσκοντα.

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Να επισημανθεί ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν . Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=x-|x|$ των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

Να επισημανθεί ότι από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι αν $x_1,x_2\in D_f$ και $x_1=x_2$ ισχύει πάντα $f(x_1)=f(x_2)$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα (ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, όπως θα φανεί σε επόμενη παράγραφο).

Επιπλέον, είναι χρήσιμο να συζητηθεί ότι ο ορισμός της ισότητας συναρτήσεων δεν μπορεί να υποκατασταθεί με τον «Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.» Καταρχάς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις τύπο. Αλλά δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο μπορεί να είναι ίσες, όπως για παράδειγμα οι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $f(x)=1$ και $g(x)=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$.

§1.3

Για την αναγνώριση των ιδιοτήτων της μονοτονίας και του «ένα προς ένα» μιας συνάρτησης είναι σημαντικό να αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις. Για το σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων της προηγούμενης παραγράφου.

Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις :

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή : $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$.

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη αυτών των προτάσεων:

i) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{και} \quad x_1 \geq x_2$$

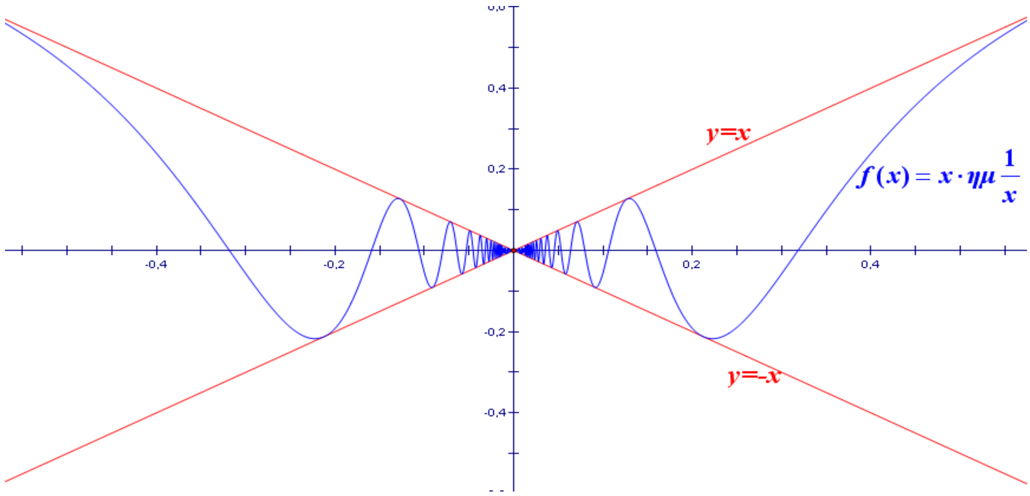
- Αν ήταν $x_1 > x_2$,επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1) > f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν $x_1 = x_2$,από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε: $f(x_1) = f(x_2)$,που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

ii) Αντίστοιχη με την i.

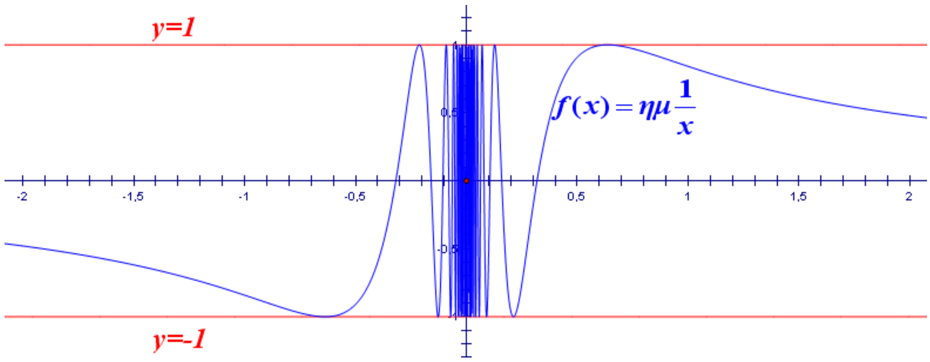
§1.4

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους μαθητές, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο x_0 δεν επηρεάζει το όριο της όταν το *x* τείνει στο x_0, καθώς και ότι η τιμή του $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ καθορίζεται, από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση κοντά στο x_0. Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 αλλά μπορεί να διαφέρουν στο x_0 (παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια ορίζεται και η άλλη δεν ορίζεται ή καμία δεν ορίζεται) έχουν το ίδιο όριο όταν το *x* τείνει στο x_0. Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του x_0, δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί μαθητές θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$ (Σχήμα 2).



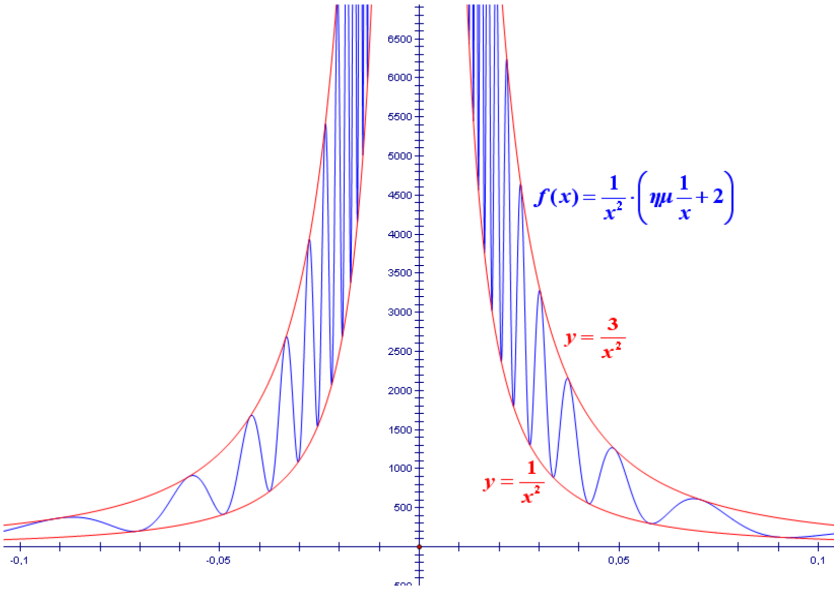
Σχήμα 2

§1.5

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους μαθητές να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του ορίου. Για παράδειγμα σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$» (άσκηση 3i) είναι χρήσιμο να ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν αν οι $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ και $g(x)=\dfrac{(x^2+4)\cdot(x+2)}{x^2+2x+4}$ είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια. Επίσης σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 της Α Ομάδας, να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο x_0 και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το x_0 να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο x_0 πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

§1.6

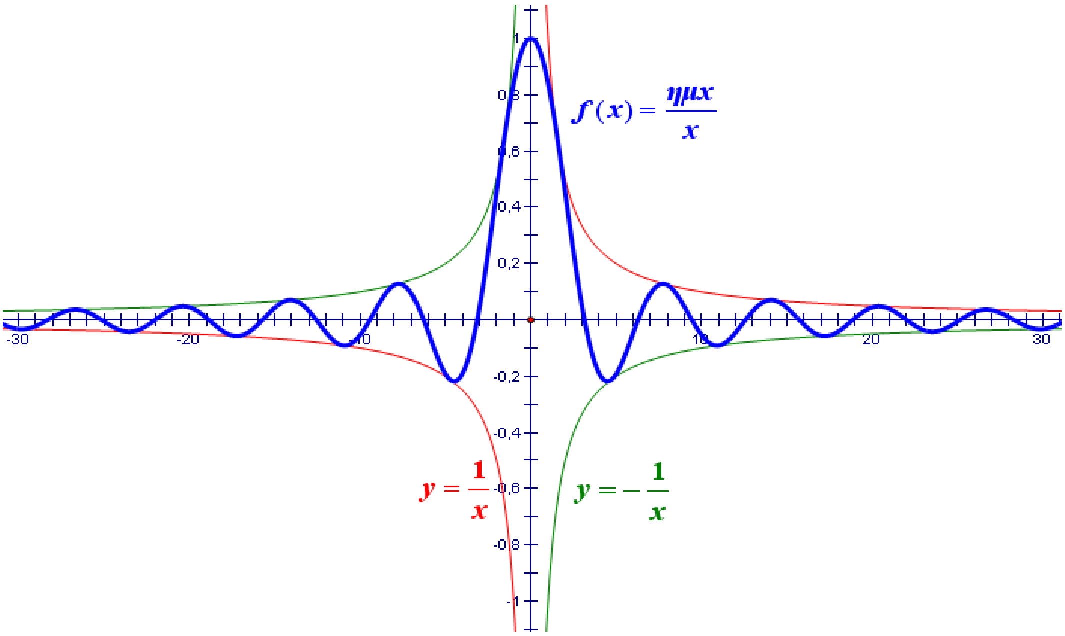
Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}+2\right)$ (Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο x_0 με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

§1.7

Να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το x τείνει στο +∞, υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το *x* τείνει στο +∞, όπως είναι για παράδειγμα η $f(x)=\eta\mu x$.



Σχήμα 4

Τα όρια: $\lim_{x\to+\infty} x^n$, $\lim_{x\to-\infty} x^n$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$, να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο :

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και

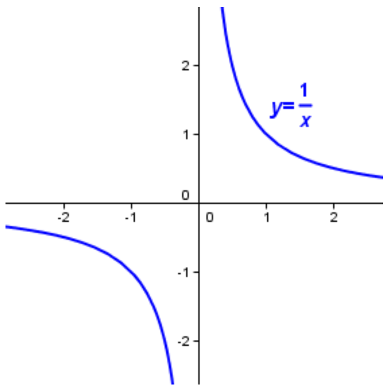
β) $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

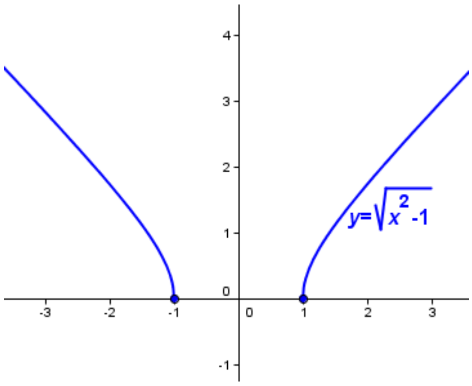
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με την βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων

§1.8

Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ (Σχήμα 5) και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (Σχήμα 6). Να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους μαθητές και σχετικές ασκήσεις.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντούν οι μαθητές στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το ανοιχτό διάστημα (α,β), τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορεί να χρησιμοποιείται, αναπόδεικτα, η πρόταση:

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim\limits_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το ¡ .

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Είναι $\lim\limits_{x \to \sigma_1} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to \sigma_2} g(x) = +\infty$. Επομένως θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$. Θα είναι $x_1 \neq x_2$ και από το θεώρημα του Bolzano η g θα έχει μια ρίζα x_0 στο ανοικτό διάστημα με άκρα x_1, x_2. Θα είναι $g(x_0) = 0$ και επομένως $f(x_0) = y$ δηλαδή ο θα είναι y είναι τιμή της f.

Κεφάλαιο 2ο

§2.1

Να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$ στο σημείο Ο, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2

Να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.3

Να δοθεί βάρος στην παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση σχετικά με το ότι το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.

Στην εφ. 2, να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους μαθητές η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνώρισαν στη γεωμετρία.

§2.4

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για το λόγο αυτό καλό είναι να γίνει προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια και να δουν ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

§2.5

Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών.

Στην εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση για το τι εκφράζει το πηλίκο $\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5}$ (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

§2.6

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του λόγου μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν θετική κλίση.

ii) γνησίως φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα *Δ* έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της μονοτονίας χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

§2.7

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως, συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων ενοτήτων και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα.

Μετά την εφαρμογή 2 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 α) i) της Β΄ Ομάδας. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε x είναι $e^x \geq x+1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει $\ln x \leq x-1$ και το «=» ισχύει αν και μόνο αν $x=1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x-1$ και το «=»

ισχύει μόνο για $e^x = 1$ δηλαδή $x = 0$. Επομένως $x \le e^x - 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $e^x \ge x + 1$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

§2.8

Υπενθυμίζεται ότι θα μελετηθούν μόνο συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους. Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχτούν οι ασκήσεις 3iv και 3v της Α ομάδας.

§2.9

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L’ Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωση του, να δοθεί στους μαθητές να υπολογίσουν το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x^2}$, το οποίο είναι της μορφής «$\frac{0}{0}$». Οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των *f* και *g* στο κοινό τους σημείο *Α(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon : y = x - 1$ και $\zeta : y = -2x + 2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - x^2$ *προσεγγίζονται* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ η τιμή του πηλίκου $\frac{\ln x}{1 - x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\frac{x - 1}{-2x + 2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ ισχύει: $\frac{\ln x}{1 - x^2} ; \frac{x - 1}{-2x + 2} = \frac{x - 1}{-2(x - 1)} = \frac{1}{-2}$,

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

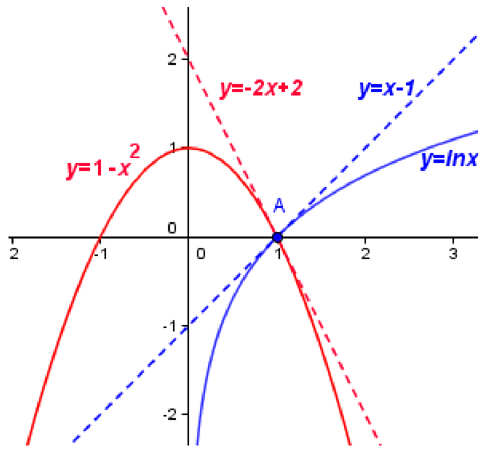
Επομένως, «κοντά» στο $x_0 = 1$ ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} ; \frac{f'(1)}{g'(1)}$, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται: $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$

ΣΧΟΛΙΟ

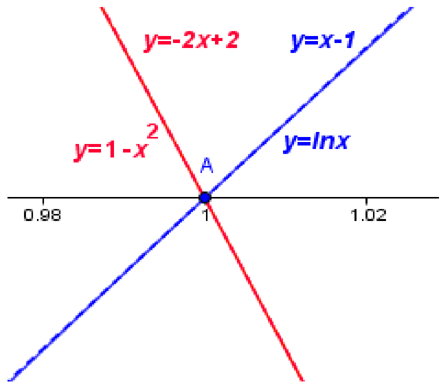
Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0 = 1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 - x^2$ *προσεγγίζονται* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y = \ln x$ και $y = 1 - x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y = x - 1$ και $y = -2x + 2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).

✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y = \ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = x - 1$, ενώ η $y = 1 - x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y = -2x + 2$ (σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Να τονιστεί ότι οι κανόνες De l' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι, αν έχουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ και επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε $\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)''}{(x)''}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο. Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$

Να τονιστεί ότι ενδέχεται μια συνάρτηση να τέμνει μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί (ευκταίο να δοθεί και το γράφημα) η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu\frac{1}{x}$ που έχει ασύμπτωτη την $y=x$ η οποία τέμνει την γραφική παράσταση σε άπειρα σημεία.

§2.10

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι μια περιεκτική μορφή αναπαράστασης που παρέχει πληροφορίες για τη συνάρτηση με άμεσο και εύληπτο τρόπο. Συγχρόνως η διαδικασία μελέτης και χάραξής της βοηθάει στην εμπέδωση και ενοποίηση προηγούμενων γνώσεων. Στην περίπτωση που η συνάρτηση εκφράζει ένα φαινόμενο, η γραφική παράστασή της προσφέρει επιπλέον κατανόηση του φαινομένου. Για το λόγο αυτό προτείνεται η χάραξη της γραφικής παράστασης και συναρτήσεων που μελετήθηκαν σε προβλήματα προηγούμενων παραγράφων (πχ στην 2.7)

Κεφάλαιο 3ο
§3.1

Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$,
2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\mathbb{R}$
7	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^{x}$	$G(x)=e^{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=\alpha^{x}$	$G(x)=\dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbb{R}$

Σημείωση:
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της παραγράφου μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων.

§3.4

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

- Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.
- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, με $f(\xi)\neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$ »

Επισήμανση: Η ισότητα του πρώτου πλαισίου είναι η εξής:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

§3.5

Η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για το λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις</u> που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ και γενικότερα στη συνάρτηση $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$.

§3.7

Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου μπορεί να χρειαστεί να συζητηθούν έννοιες και διαδικασίες από τις προηγούμενες τάξεις, όπως επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, συστημάτων, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.

<u>**Επισήμανση:**</u>

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

<u>**Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.**</u>

Η ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΣΟΦΙΑ ΖΑΧΑΡΑΚΗ

<u>**Εσωτ. Διανομή**</u>
- Δ/νση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Δ/νση Παιδείας, Ομογ., Διαπ. Εκπ/σης, Ευρ. και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης & Διαθρ. Σχέσεων
- Δ/νση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Αυτ. Διεύθυνση Ιδιωτικής Εκπ/σης
- Αυτ. Τμήμα Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων
- Διεύθυνση Εξετάσεων και Πιστοποιήσεων, Τμ. Α΄

<u>**ΑΚΡΙΒΕΣ ΑΝΤΙΓΡΑΦΟ**</u>